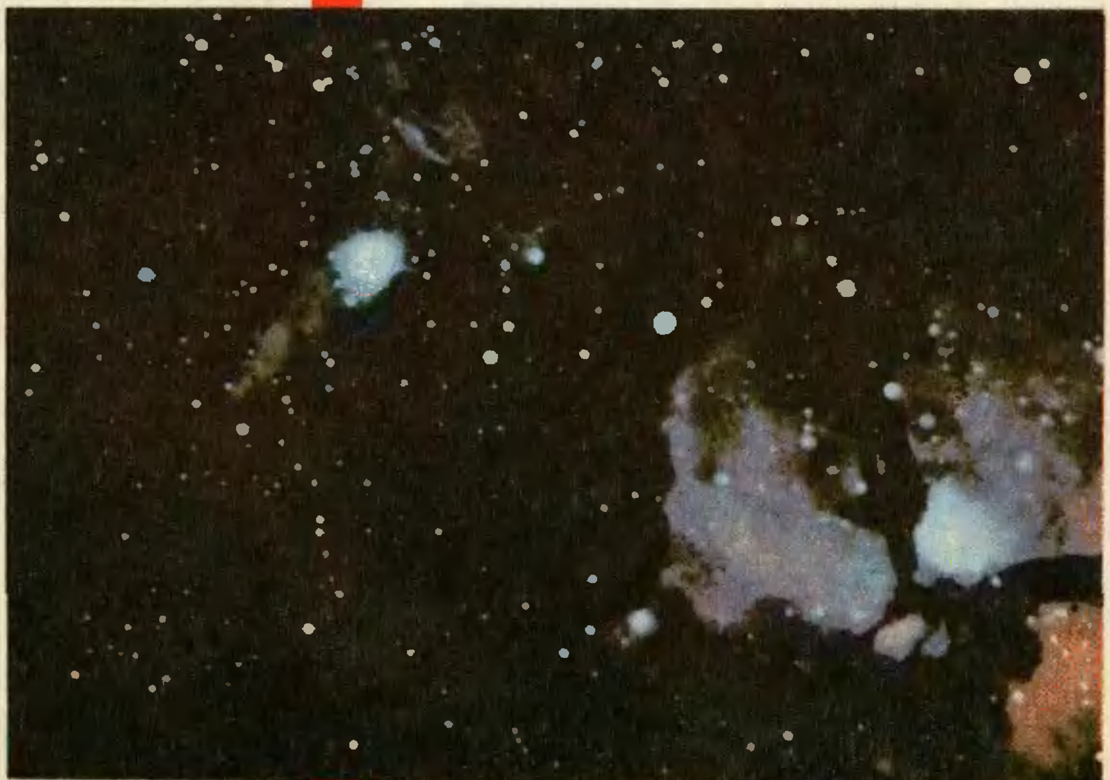
ISSN 0130-2221

Квант

Научно-популярный физико-математический журнал

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12



Вселенная — тепловая машина?

1988

Квант

Основан в 1970 году

4 1988

Научно-популярный физико-математический журнал Академии наук СССР и Академии педагогических наук СССР

Издательство «Наука». Главная редакция физико-математической литературы

В номере:

ВСЕЛЕННАЯ КАК ТЕПЛОВАЯ МАШИНА

Доктор физико-математических наук
И. Д. НОВИКОВ

Мы живем в расширяющейся Вселенной. Этот факт был предсказан теоретически советским математиком А. А. Фридманом и подтвержден в конце 20-х годов американским астрофизиком Э. Хабблом.

Нестационарность окружающего нас мира имеет определяющее значение для физических процессов во Вселенной. В этой статье мы расскажем о некоторых общих закономерностях тепловых процессов в макромире. Применение открытых в прошлом веке законов термодинамики ко всей Вселенной приводило раньше к странным выводам, порой к парадоксам. И мы рассмотрим здесь некоторые из них. Но прежде чем обращаться к этим проблемам, напомним очень кратко суть теоретического предсказания Фридмана.

Основная мысль работы Фридмана гениально проста и состоит в следующем. В очень больших масштабах (как теперь известно, в масштабах более многих сотен миллионов световых лет) материя в виде галактик, их скоплений распределена в пространстве однородно. Взаимное притяжение гигантских масс неизбежно приведет к их движению и взаимному перемещению. Приводит это движение к расширению или сжатию системы — зависит от начальных условий, от того, например, сообщили ли какие-то силы начальные скорости разлета веществу, из которого потом образовались галактики (т. е. произошел ли в прошлом своеобразный взрыв Вселенной), или, скажем, начальное состояние вещества было очень разреженным, и силы взаимного тяготения стягивали его, заставляя сжиматься со все нарастающей скоростью.

А. А. Фридман использовал в своих работах релятивистскую теорию тяготения А. Эйнштейна, обобщившую на случай сверхсильных полей закон всемирного тяготения И. Ньютона. Однако важные закономерности его выводов можно пояснить и в рамках теории Ньютона, не обращаясь к сложной теории Эйнштейна.

Нам потребуется основной закон движения масс Вселенной. Этот закон можно вывести из следующих соображений. Рассмотрим во Вселенной большой сферический объем с радиусом R много сотен световых лет (так чтобы распределение материи можно было считать однородным). Обозначим его массу M. Из наблюдений известно, что галактики удаляются друг от друга, т. е. наш объем расширяется, его граница удаляется от центра. Как с течением времени будет меняться скорость v этого расширения?

Согласно закону Ньютона на галактику массой m ($m \ll M$), находящуюся на границе нашего объема, со стороны всей массы шара действует сила притяжения

$$F=\frac{GMm}{R^2}.$$

Эта сила тормозит расширение. Оказывается, что силы тяготения, действующие на галактику со стороны всех неограниченно простирающихся внешних масс, учитывать не надо, так как они направлены в разные стороны и при сложении точно урав-

---

Настоящая статья появилась в ходе работы автора над книгой «Как взорвалась Вселенная». Книга будет выпущена в свет издательством «Наука» в серии «Библиотечка «Квант» в этом году. Очень советуем приобрести эту книгу. Из нее вы узнаете о современных представлениях космологии, о проблемах, стоящих перед учеными в этой области.

новешивают друг друга (мы этого доказывать здесь не будем). Теперь уже легко написать закон движения галактики на границе шара, а значит и закон движения само́й границы шара. Для этого запишем полную энергию E галактики. Она складывается из кинетической энергии $E_к = \frac{mv^2}{2}$ и потенциальной энергии тяготения $E_п = -\frac{GMm}{R}$ (заметьте, что энергия тяготения отрицательна):

$$E = E_к + E_п = \frac{mv^2}{2} - \frac{GMm}{R}. \qquad (1)$$

Подчеркнем, что в силу закона сохранения энергии полная энергия E не меняется — $E = \text{const}$.

Из формулы (1) видно, что если $E > 0$, то радиус шара может увеличиваться неограниченно — v при этом хоть и уменьшается, но не обращается в нуль. При $R \to \infty$ энергия E целиком определяется кинетической энергией движения. Если же $E < 0$, то тяготение останавливает расширение шара, v обращается в нуль при некотором максимальном значении радиуса R_{max} —

$$R_{max} = \frac{GMm}{|E|}, \qquad (2)$$

а затем шар начинает сжиматься.

Так как наш шар был выбран произвольно, а распределение материи во Вселенной однородно, то движение границы шара по существу описывает движение любых больших масс во Вселенной. Перепишем уравнение (1), поделив его на m, в виде

$$\frac{v^2}{2} - \frac{GM}{R} = \text{const}', \qquad (3)$$

где $\text{const}' = E/m$. Это уравнение описывает изменение с течением времени расстояний R между любыми далекими галактиками или частицами вещества во Вселенной (в прошлом, когда галактик еще не было). Таким образом, уравнение (3) есть уравнение динамики Вселенной.

К сказанному добавим следующее. Согласно теории Эйнштейна тяготение меняет геометрические свойства пространства, «искривляет» его. Если $\text{const}' < 0$ ($E < 0$), то геометрия оказывается подобной геометрии на сфере, параллельные прямые пересекаются, а само пространство оказывается замкнутым, имеющим конечный объем. Искривленность пространства задается «радиусом кривизны мира» l, а полный объем замкнутой Вселенной по порядку величины есть $V \sim l^3$. Изменение l с течением времени описывается, как и изменение других расстояний во Вселенной, законом (3).

Прослеживая изменение R или l в прошлом, мы приходим к заключению, что расширение началось с формально точечных размеров и бесконечной плотности материи ρ — как говорят, с сингулярного состояния. Мы употребили слово «формально», чтобы подчеркнуть, что это заключение — лишь математическая идеализация, ибо при очень больших плотностях (как показывают оценки, при $\rho \approx 10^{94}$ г/см^3) должны проявляться новые физические закономерности. В частности, в этих условиях должны появиться особые, так называемые вакуумноподобные состояния материи, природа которых еще не совсем ясна и которые обусловили возникновение сил отталкивания, вызвавших начальный взрыв Вселенной. Естественно возникает вопрос: а что было до того? Однозначного ответа пока нет, и специалисты рассматривают здесь разные возможности.

Все сказанное выше позволяет нам представить эволюцию Вселенной в прошлом следующим образом. До сингулярного состояния происходило сжатие Вселенной, плотность материи увеличивалась, и в конце концов возникло сверхплотное сингулярное состояние. Законы природы в этом состоянии мы знаем еще очень плохо, точнее — только догадываемся о некоторых из них. В этом состоянии, вероятно, возникают огромные силы гравитационного отталкивания, которые останавливают сжатие Вселенной и заставляют ее начать расширяться. В этой расширяющейся Вселенной мы и живем сегодня.

Возможен ли такой «сценарий» эволюции Вселенной?

В принципе — возможен. До недавнего времени некоторые специалисты относились к нему весьма благосклонно. Вероятно, это отношение связано в первую очередь с чисто субъективными причинами. Действительно, в таком сценарии время длит-

ся «от минус бесконечности до плюс бесконечности»; хотя в сингулярном состоянии и возникают «какие-то неясности», но «река времени» не имеет ни истока, ни конца (в полном согласии с нашими привычными и «наглядными» представлениями). Правда, в простейшем варианте есть заметный дефект. А именно: мы считаем, что в далеком прошлом Вселенная сжималась из бесконечно разреженного начального состояния. Уж очень примитивно и «наивно» выглядит это начальное состояние бесконечно малой плотности.

Указанный «дефект» пытались убрать следующим образом. Будем считать, что постоянная const′ в уравнении (3) меньше нуля. Тогда расширение Вселенной должно смениться сжатием. Если теперь мы положим, что после сжатия до сингулярного состояния наступает новое расширение (так ли это — мы пока не знаем), то это означает повторение цикла: новое расширение Вселенной, затем новое сжатие и т. д. Таким образом, мы получили пульсирующую модель Вселенной. На первый взгляд эта модель выглядит очень привлекательно. Казалось бы, в ней нет истока «реки времени», Вселенная существует вечно. Кроме того, нет и странного состояния бесконечно малой плотности в далеком прошлом, а вместо этого предстает картина в среднем неизменной вечной Вселенной с бесконечным числом циклов пульсаций.

Но оказалось, что дело обстоит вовсе не так просто, и подобный сценарий эволюции Вселенной вряд ли может осуществляться в действительности. Трудности, которые возникают в такой теории, уходят своими корнями в середину прошлого века.

В 1850 году немецкий физик Р. Клаузиус и в 1851 году независимо от него английский физик У. Томсон открыли закон, известный как второе начало термодинамики. В формулировке Томсона этот закон звучит следующим образом: в природе невозможен процесс, единственным результатом которого была бы механическая работа, совершенная за счет охлаждения теплового резервуара. Отсюда следовало, что невозможно полное превращение тепла в механическую энергию. Это означает, что если изолировать какую-либо систему, то в конце концов в этой системе все виды энергии перейдут в тепло, а тепло равномерно распределится по всей системе — наступит, как говорят, термодинамическое равновесие.

На практике мы прекрасно знаем проявление этого закона. В механических системах трение приводит к переходу механической энергии в тепло. В тепловых машинах мы можем, правда, переводить тепловую энергию в механическую работу. Но для этого обязательно надо поддерживать разницу в температурах нагревателя и холодильника, иначе машина работать не будет, а на это надо затрачивать энергию, и часть затрачиваемой энергии при этом также переходит в тепло. Так происходит непрерывное накапливание тепла, переход всех видов энергии в тепло. Позже Клаузиус дал математическое выражение второго начала термодинамики.

Томсон и Клаузиус поняли важнейшее значение открытого ими закона термодинамики для эволюции всей Вселенной. Действительно, вся Вселенная должна рассматриваться как изолированная система, и для нее обмен энергией с какими-то «другими системами» невозможен. Значит, во Вселенной все виды энергии должны перейти в конце концов в тепло, тепло равномерно распределится по Вселенной. Хотя закон сохранения энергии при этом не нарушается, энергия никуда не исчезает и остается в виде тепловой энергии, но она оказывается «бессильной», лишенной возможности превращения в механическую работу, и все макроскопические движения во Вселенной прекратятся. Такое мрачное состояние получило название «тепловой смерти» Вселенной. Читатель, наверное, согласится, что название это очень точно характеризует саму суть описанного состояния. Но Вселенная, в которой мы живем, явно не находится в состоянии «тепловой смерти»! Отсюда напрашивались теологические выводы: либо Вселенная существует сравнительно недолго и не пришла еще к состоянию «тепловой смерти», либо «кто-то» со стороны вмешивается в эволюцию Вселенной, не давая ей развиваться к состоянию «тепловой смерти».

Проследим, как эти мрачные предсказания опровергались наукой. Термодинамические идеи Клаузиуса и Томсона были развиты австрийским физиком Л. Больцманом. Он показал, в чем заключается смысл второго начала термодинамики. Тепло является по существу хаотическим движением атомов или молекул, составляющих материальные тела. Поэтому переход энергии механического движения отдельных частей системы в тепло означает переход организованного движения в хаотическое, увеличение беспорядка в системе. То же можно сказать и о других видах движения материи. Такое увеличение беспорядка неизбежно в силу статистических законов, если только на систему не влиять извне, не способствовать сохранению порядка.

Больцман показал, что мерой беспорядка в системе является величина, введенная еще Клаузиусом,— энтропия. Чем больше хаос — тем больше энтропия. Переход отдельных видов движения материи в тепло означает рост энтропии. Если все виды энергии перешли в тепло, а тепло равномерно распределилось по системе, то это состояние максимального хаоса уже не меняется с течением времени и соответствует максимуму энтропии.

Но такая интерпретация означает, что второе начало термодинамики не всегда выполняется абсолютно точно, возможны отклонения от него. Действительно, смысл этого закона состоит в том, что изолированная система переходит во все более вероятное состояние хаотического движения частичек, ее составляющих. Но в ходе такого перехода возможны случайные отклонения, флуктуации. Так, например, в каком-то небольшом объеме газа атомы при столкновениях с соседями могут случайно приобрести одинаково направленные импульсы, т. е. могут случайно начать двигаться в одном направлении. Это будет уже не тепловое (хаотическое) движение, а направленное движение какого-то объема газа в целом. Тепловое движение частиц случайно перешло в направленное механическое движение. Но, разумеется, такие случаи очень редки и маловероятны. И чем больший объем в газе мы будем брать, тем с меньшей вероятностью с ним могут случаться подобные казусы. В целом, за исключением очень редких и небольших флуктуаций, энтропия изолированной системы всегда растет, и система приходит в наиболее вероятное состояние максимума энтропии, в котором должна пребывать неограниченно долго. Но все же, хотя и редко, то в одном месте системы, то в другом по закону случая будут происходить отклонения от этого состояния, как правило очень небольшие.

Вот на этом пути Больцман и искал выхода из мрачного заключения о «тепловой смерти» Вселенной.

Бесконечная Вселенная, говорил он, вечно пребывает в наиболее вероятном состоянии термодинамического равновесия с максимальной энтропией. Но в любом объеме ее возможны редкие отклонения от этого состояния — флуктуации. Правда, в больших объемах заметные флуктуации очень редки. Но если у нас в запасе бесконечное время, то мы можем дождаться сколь угодно большой случайной флуктуации в огромных объемах. Вот в такой гигантской флуктуации, согласно Больцману, мы и живем.

Флуктуационная гипотеза Больцмана была единственной (с точки зрения тогдашней физики) попыткой опровержения вывода о «тепловой смерти» вплоть до открытий Фридмана и Хаббла.

Эти открытия в корне изменили наши представления о том, к какому состоянию направлена эволюция процессов во Вселенной. Прежде всего, выяснилось, что определяющую роль в эволюции Вселенной играет тяготение. В рассуждениях о «тепловой смерти» тяготение вообще игнорировалось. Между тем этого делать никак нельзя.

В обычных рассуждениях о переходе всех видов энергии в тепло и замирании в результате этого всех процессов в изолированной системе полагалось, что общее количество энергии системы не меняется. Конечно, скажет читатель, это предположение справедливо — ведь система изолирована. Откуда же может взяться дополнительная энергия, способная поддерживать движение в системе?

Разумеется, закон сохранения полной энергии незыблем. Но мы не учли в наших рассуждениях энергию тяготения. А эта энергия своеобразна — она отрицательна (см. формулу (1)). Как это сказывается на происходящих во Вселенной процессах? Попробуем разобраться в этом на таком примере: рассмотрим газовый шар, между частицами которого действуют силы тяготения. Предположим, что сначала вещество шара было холодное и было рассеяно в пространстве, взаимное тяготение между частицами было крайне мало, и гравитационная энергия вещества практически была равна нулю. Пусть постепенно под действием хотя и слабого тяготения вещество собирается в шар, и этот шар сжимается все дальше тяготением. Ясно, что вещество шара при этом набирает все бóльшую скорость и, следовательно, все бóльшую кинетическую энергию движения. Эта положительная энергия нарастает за счет тяготения. Но в силу закона сохранения энергии, полная энергия системы должна сохраняться. Значит рост положительной энергии движения сопровождается уменьшением потенциальной энергии тяготения, т. е. ростом ее абсолютной величины (ведь $E_п<0$). Теперь понятно, что при сжатии системы положительная часть ее энергии может возрастать за счет тяготения. Вот это обстоятельство раньше, когда на тяготение не обращали должного внимания, и не учитывалось. Раз положительная часть энергии изолированной системы может возрастать, то нарастание энтропии (которое обязательно происходит) не обязательно ведет к замиранию процессов.

Таким образом, вывод о «тепловой смерти» в том виде, как он делался в середине прошлого века, когда не принимался во внимание факт нестационарности Вселенной,— неправилен.

Посмотрим теперь, как конкретно «работает» тяготение в модели пульсирующей Вселенной, опровергая вывод о замирании всех макроскопических движений в мире.

В пульсирующей Вселенной в каждом цикле происходит увеличение энтропии, накопление тепла (согласно второму началу термодинамики, справедливость которого, конечно, не нарушается). Накопление тепловой энергии происходит в больших масштабах, например, при свечении звезд, перерабатывающих запасы ядерной энергии в излучение. Будем предполагать, что в сингулярном состоянии энтропия не может резко уменьшаться.

Энтропия нарастает от цикла к циклу. На первый взгляд, это должно было бы приводить к замиранию пульсаций, к уменьшению их амплитуды. Казалось бы, картина должна быть подобна затуханию колебаний маятника, когда трение в его подвесе постепенно переводит энергию колебаний в тепло. На самом деле картина пульсаций в такой модели Вселенной выглядит совсем иначе — амплитуда пульсаций Вселенной увеличивается!

Покажем это.

Обратимся прежде всего к формуле (3). В каждом цикле в момент максимума расширения Вселенной (см. формулу (2)), когда расширение сменяется сжатием, скорость v движения вещества шара на мгновение обращается в нуль. Приравнивая $v=0$ в выражении (3), мы получим условие для этого момента: $\frac{GM}{R_{max}}=-\text{const}'$. (Напомним, что в нашей модели $\text{const}'<0$.) Теперь подставим в это выражение $M=\frac{4}{3}\pi R_{max}^3\rho_*$, где ρ_* — плотность вещества в момент максимума расширения. После этого получим: $\rho_* R_{max}^2=\text{const}''$. Наконец вспомним, что радиус кривизны мира l изменяется со временем точно так же, как и радиус шара R. Поэтому и для радиуса кривизны l_{max} — в максимуме расширения Вселенной — мы

(Окончание см. на с. 20)

ЛЕНГМЮРОВСКИЕ ПЛЕНКИ — ПУТЬ К МОЛЕКУЛЯРНОЙ ЭЛЕКТРОНИКЕ?

Кандидат физико-математических наук
Ю. М. ЛЬВОВ,
доктор физико-математических наук
Л. А. ФЕЙГИН

Без электронной техники немыслима жизнь современного человека: электроника — это микрокалькуляторы и ЭВМ, проигрыватели и магнитофоны, наручные часы и электронные игрушки. Но чтобы создать все эти действующие устройства, нужно иметь набор «кирпичиков» — элементов электроники, и чем мельче будут эти «кирпичики», тем более «умную» электронную схему можно собрать в корпусе микрокалькулятора или часов. Так, например, если первые ЭВМ занимали большие залы, заставленные шкафами с электронными схемами, то теперь за счет миниатюризации элементов такая же по мощности ЭВМ имеет размер всего с тумбочку.

На рисунке 1 приводится в виде графика размер электронного элемента в зависимости от года производства. График охватывает 1930—2000 годы. Сначала основным элементом были электронные лампы (размер 1—5 см); создание транзисторов позволило в 10 раз уменьшить размер «кирпичика» электроники; следующий шаг — появление микросхем (интегральных и больших интегральных схем), когда на одном кристалле создаются уже целые устройства,— позволил еще в 10—100 раз уменьшить размер элемента, доведя его до 1 мкм. Такие микросхемы — основной «строительный материал» сегодняшней электроники. Дальше лежат пока не достигнутые размеры в десятки нанометров, т. е. $\sim 10^{-8}$ м. Такой элемент микроэлектроники оказался бы размером с большую органическую молекулу. Если считать, что темпы миниатюризации электронных элементов останутся прежними, то к 2000 году можно ожидать создания молекулярной электроники. И очень может быть, что сегодняшние читатели «Кванта» в своей будущей работе будут составлять схемы электронных машин уже из молекул, каждая из которых будет выполнять какую-либо логическую или арифметическую операцию. Другим важнейшим плюсом молекулярной электроники (помимо миниатюрности) является возможность использования в элементах размером в несколько нанометров физических явлений, имеющих квантово-механическую природу.

Буквально в последние годы в физике твердого тела возникла и бурно развивается новая область — мезоскопика, которая изучает вопросы о протекании тока в сверхмалых электротехнических элементах. Сейчас становится понятным, что, по-видимому, есть теоретические пределы дальнейшей миниатюризации. Дело в том, что при очень малых размерах элемента каждый «проводок» имеет свою индивидуальную вольтамперную характеристику (подобно тому

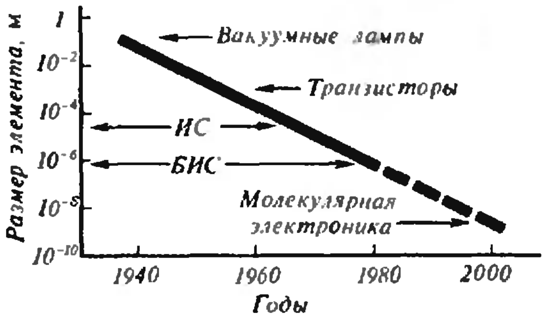


Рис. 1.

как каждый человек имеет свои характерные отпечатки пальцев), и она может существенно отличаться от линейной (соответствующей закону Ома). В будущих разработках элементов молекулярной электроники учет подобных эффектов может оказаться существенным.

Но как же собирать схемы из таких маленьких «кирпичиков»? Уже сегодня разработаны технологические методы, позволяющие «собирать» устройства размером в десятки и сотни нанометров. Это, например, метод молекулярной эпитаксии*), когда молекулы слой за слоем укладываются в тонкие пленки. Мы же хотим рассказать о другом методе, который в последние годы привлек внимание исследователей. Это так называемый ленгмюровский метод, позволяющий получать тонкие пленки органических молекул, содержащие точно 1, 2, 3, ..., 25 и т. д. молекулярных слоев в образце.

История этих пленок началась в XVIII веке с опытов американского ученого Б. Франклина. Франклин вылил малое количество оливкового масла на поверхность пруда, покрытую мелкой рябью, и вскоре рябь стихла, поверхность стала гладкой. Из этого Франклин заключил, что ничтожное количество масла сумело покрыть всю поверхность. Опыт был описан в 1790 году в журнале «Философские записки», издававшемся Лондонским королевским обществом (Академия наук Англии). Через сто лет английский физик У. Рэлей выдвинул предположение, что в таких экспериментах на поверхности воды образуется пленка толщиной всего в один слой молекул. Зная исходный объем масла, можно, поделив его на площадь пленки, вычислить ее толщину (а следовательно, размер молекулы масла). Она оказалась чрезвычайно малой — всего около 10 нм. В дальнейшем в лабораториях были поставлены опыты,

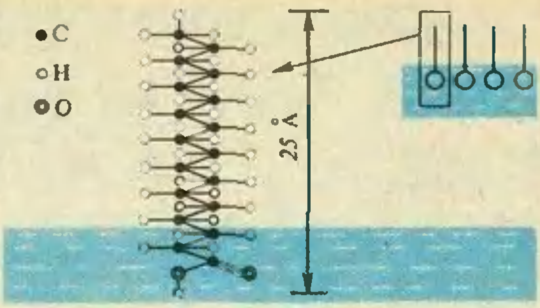


Рис. 2.

позволившие более точно оценить размеры молекул масла.

Подобный опыт можно провести дома в ванне. Для этого следует капнуть в заполненную ванну масла (предпочтительно оливкового, так как оно растекается по поверхности воды лучше, чем подсолнечное). Через несколько минут пленка распространится на всю ванну. Отметим, что довольно трудно определить границу масла (чтобы лучше видеть ее, можно посветить на поверхность фонариком). Кроме того, пленка будет неравномерной по толщине, она будет содержать как бы окошки, где слой масла очень тонкий, и более толстые перегородки. Но, тем не менее, оценить толщину пленки мы сможем. Однако в нашем опыте есть один серьезнейший минус — мы не знаем, сколько молекул по толщине образуют пленку, и не можем добиться однородности пленки по толщине.

На строгий физический уровень такие опыты поставил американский

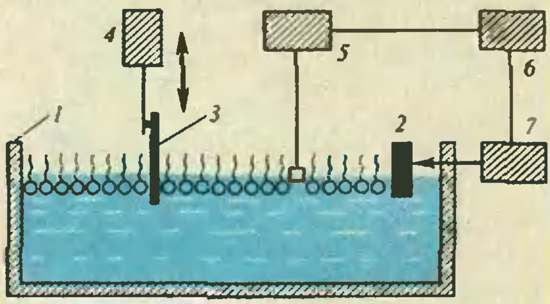


Рис. 3. Ленгмюровская установка: 1 — ванна с водой, 2 — подвижный барьер, 3 — подложка, 4 — мотор, управляющий опусканием подложки, 5 — устройство, измеряющее поверхностное натяжение, 6 — электронная схема, вырабатывающая сигнал для работы мотора 7, двигающего барьер.

*) Эпитаксии (от греческих слов επι...— на, над, сверх, после и τάξις — расположение) — ориентированный рост одного монокристалла на поверхности другого (подложки) (*Советский энциклопедический словарь*. М.: Советская энциклопедия, 1980).

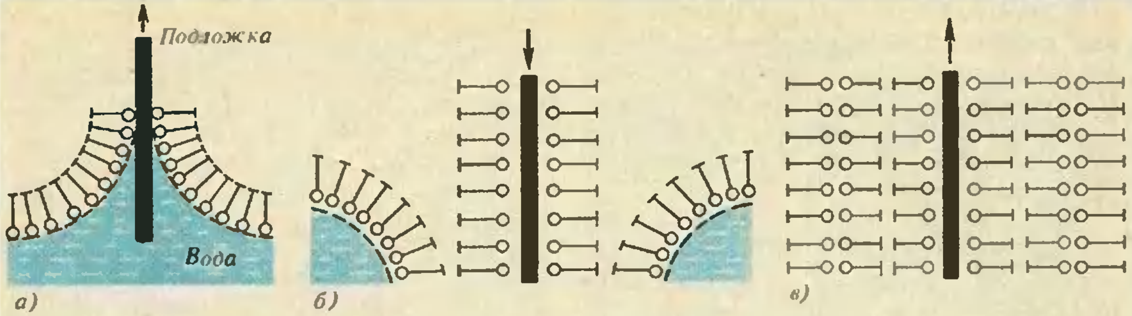


Рис. 4.

физик И. Ленгмюр, получивший за данные работы в 1932 году Нобелевскую премию. Примерно так же, как в свое время Ленгмюр, и сейчас получают молекулярные пленки (их и называют ленгмюровскими). Поэтому опишем этот способ подробнее.

Сначала разберемся, как располагаются молекулы на поверхности воды. Пленки по ленгмюровской методике можно получить из так называемых амфифильных органических молекул, т. е. молекул, содержащих гидрофильную («любящую» воду) и гидрофобную («не любящую» воду) части. Именно такими являются молекулы жирных кислот (масел). На рисунке 2 изображено расположение молекулы стеариновой кислоты на поверхности воды. Гидрофильная «голова» молекулы погружена в воду, а гидрофобный «хвост» расположен на воздухе и не дает молекуле уйти в воду.

Чтобы получить на поверхности воды монослой таких молекул, поступают следующим образом. Масло растворяют в летучем органическом растворителе, например в ацетоне, так, чтобы относительная концентрация молекул масла была малой (около 0,01 %). На поверхность воды в специальной установке, называемой ленгмюровской ванной (рис. 3), помещают каплю такого раствора. Капля быстро «разбегается» по поверхности воды, ацетон испаряется, и на поверхности воды остаются разбросанными одиночные амфифильные молекулы масла.

Эти молекулы надо собрать в однородный масляный слой. Для этого по поверхности воды в ленгмюровской ванне передвигают барьер (см. рис. 3), с помощью которого сгоняют все молекулы к одному краю ванны и поджимают их так, что на поверхности воды образуется пленка, молекулы в которой расположены в один слой (мономолекулярная пленка). Теперь эту пленку надо перенести на специально обработанную подложку (кремниевую или стеклянную пластинку). Делают это так. Подложку, находящуюся в ванне (см. рис. 3), начинают очень медленно, со скоростью ~1 см/ч, поднимать. Подложка хорошо смачивается водой, и гидрофильные «головы» молекул, не желая расставаться с водой, «тянутся» за ней (рис. 4, *а*) и в конечном итоге оказываются «прилипшими» к подложке. Так на подложке вырастает точно один слой молекул, ориентированных определенным образом — «голова» на подложке, «хвост» наружу. Начнем опускать подложку назад, в ванну. Теперь подложка не смачивается водой (рис. 4, *б*), за ней утягивается вниз пленка масла — образуется второй мономолекулярный слой, «сцепленный» с первым «хвостами». Наружу, в воду, торчат гидрофильные «головы» молекул, и если мы снова начнем поднимать подложку, вода, вновь хорошо ее смачивающая, «потянется» за ней, а за водой — «головы» молекул. Так что повторно поднятая подложка будет «одета» в три мономолекулярных слоя, ориентированных определенным образом (рис. 4, *в*). Таких слоев мы можем получить сколько угодно, и всегда будем точно знать, сколько молекулярных слоев расположено на подложке.

В развитие методов переноса таких пленок на твердотельные подложки большой вклад внесла ученица И. Ленгмюра К. Блоджетт, поэтому такие пленки на подложках называют пленками Ленгмюра — Блоджетт или Л—Б пленками.

Конечно, в реально работающих ленгмюровских установках все не так просто. Во-первых, необходимо строго контролировать процесс собирания одиночных молекул, «рассеянных» на поверхности воды в ванне (такое состояние называют «двумерным газом» молекул). По мере образования пленки «плотность упаковки» молекул меняется: сначала они упакованы менее плотно («двумерная жидкость»), а затем более плотно («двумерное твердое тело»); соответственно изменяется поверхностное натяжение в слое. На этом этапе очень важно не пережать барьером, иначе молекулы начнут налезать друг на друга слоями. Нанесение пленки производят в режиме «твердое тело».

Во-вторых, по мере переноса молекул на подложку в молекулярном слое на поверхности воды будут образовываться дыры. Чтобы избежать этого, барьером поддавливают пленку, все время уменьшая ее площадь; этот процесс отслеживает электронная система. Автоматизировано движение подложек, контролируется температура, степень кислотности среды и т. п.

Естественно, создавая «кирпичики» электроники, для начала надо иметь Л—Б пленки проводники, полупроводники и диэлектрики. В самое последнее время удалось получить такие пленки. Общая схема работ такова: выбирается нужная молекула, например, краситель, затем к ней химически «пришивается» гидрофобный хвост — и теперь можно пытаться наносить пленку на подложку по описанной методике.

С помощью ленгмюровской методики можно реализовать очень привлекательную с точки зрения электроники идею — идею молекулярной архитектуры. Действительно, мы можем перенести на подложку сначала слой молекул вещества А, затем слой молекул вещества Б, затем — вещества В и т. д. Правда, для этого нужно несколько ленгмюровских ванн, заполненных разными веществами, или же одна многосекционная ванна. Такие установки уже созданы. Итак, мы умеем теперь наслаивать различные молекулы друг на друга, строго контролируя процесс и не ошибаясь ни на один слой. Значит, можно пытаться создавать элементы молекулярной электроники размером около 10 нм, запланированные на нашем графике (см. рис. 1) на 2000 год. Как создавать? На этот счет идей немало. Ну, хотя бы такая: попробуем создать элемент по аналогии с известной электронной лампой — триодом. Принцип работы триода вам знаком: электроны с катода, увлекаемые электрическим полем, летят к аноду, а их поток регулируется изменением электрического потенциала на расположенной посередине сетке. Как мог бы выглядеть «пленочный» аналог триода? Сделаем так: подготовим электрод — он будет аналогом катода; затем нанесем на него один слой молекул диэлектрика; на диэлектрик — один слой проводящих молекул — это аналог сетки; затем — опять один слой диэлектрических молекул; и наконец, сверху еще один электрод — анод. Роль вакуума, обеспечивающего в триоде пролет электронов от катода к аноду, в нашем «приборе» играют тонкие диэлектрические прослойки, через которые электроны могут проходить с помощью туннельного механизма (квантового эффекта «просачивания» электронов сквозь диэлектрическую прослойку толщиной 1—10 нм). Вот и готов триод размером всего в 10—20 нм. Пока этот триод только фантазия, но целый ряд подобных МДМ (металл — диэлектрик — металл) и МДП (металл — диэлектрик — полупроводник) элементов с использованием ленгмюровских пленок уже создан.

Ленгмюровские пленки применяются в качестве сверхтонкого и очень однородного электронного резиста. С помощью электронного пучка на пленке рисуется микросхема. В тех местах, где «прошелся» пучок электронов, молекулы пленки полимеризуются и становятся нерастворимыми для органических растворителей, в то время как с остальных участков кристалла-подложки пленка смывается.

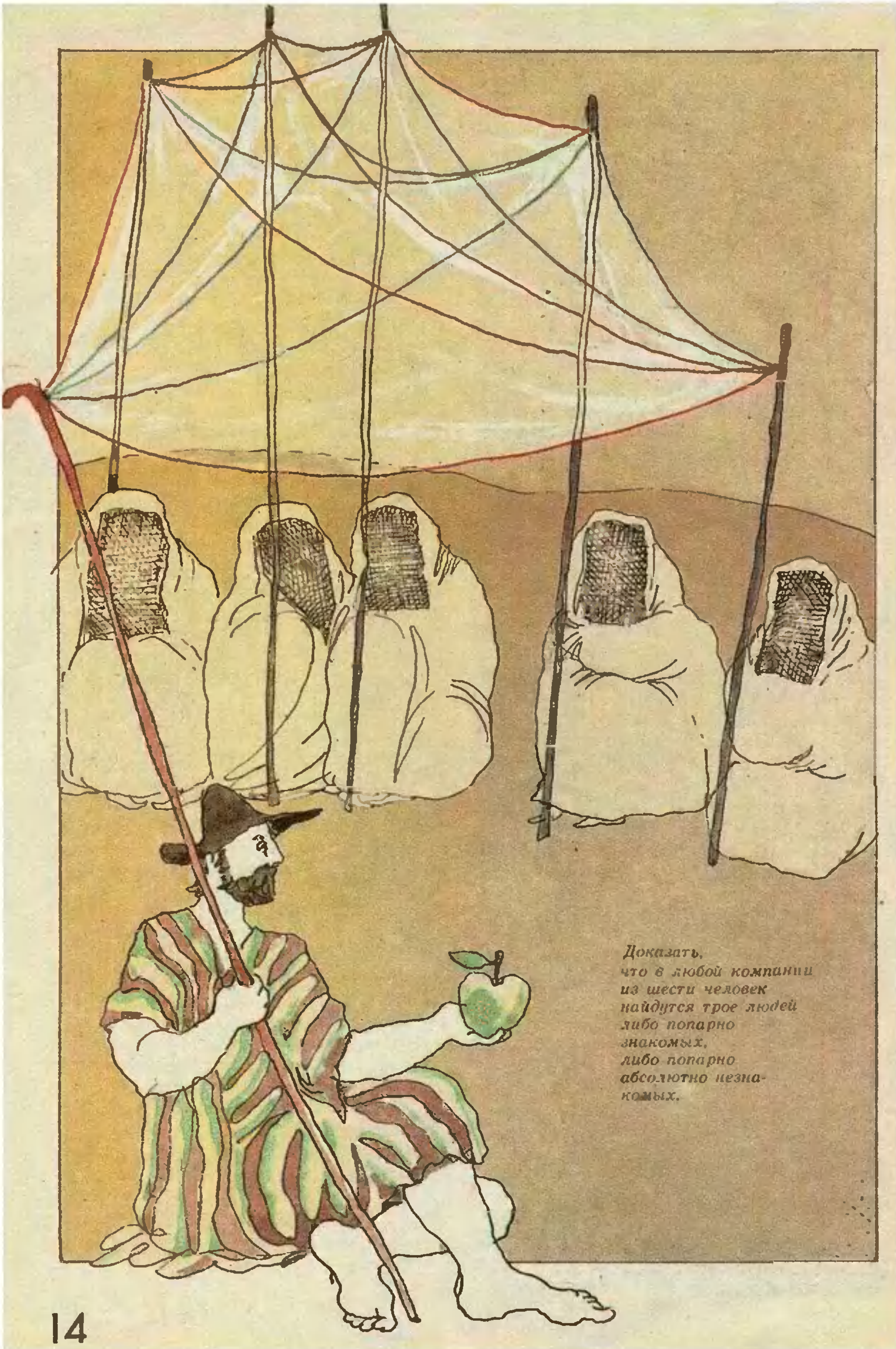
Еще одно применение ленгмюровских пленок — молекулярно-упорядоченная смазка. Когда мы капаем масло в подшипник, то между трущимися частями пространство заполняется сотнями и тысячами слоев молекул масла, которые и уменьшают трение — сухое трение заменяется жидким. Однако в современных высокоточных устройствах такая смазка не годится. Например, при считывании информации с дисков магнитной записи, применяемых в современных ЭВМ, используется такая схема: над быстро вращающимся диском движется считывающая головка. Расстояние между головкой и поверхностью диска не должно превышать 20—30 нм. Как же здесь уменьшить трение? Специалисты японской фирмы «Сони» покрыли магнитный диск однослойной ленгмюровской пленкой и показали, что такая «смазка» позволяет почти в 100 раз повысить износостойкость головки и длительность сохранности записи на диске.

Но все же главное, что волнует исследователей,— это создание на основе ленгмюровской технологии принципиально новых элементов электроники. Очень перспективно здесь внедрение в ленгмюровские пленки больших органических молекул, уже «умеющих» выполнять какие-либо сложные операции. Сама природа разработала и создала для нас тысячи таких маленьких «заводиков» — это молекулы белков. Например, молекула белка родопсина при поглощении кванта света меняет свое состояние — происходит перемещение протона, которое может быть зарегистрировано. Если с помощью ленгмюровской технологии включить молекулы родопсина в пленку, то получится очень чувствительный датчик света. Уже созданы молекулярные датчики, позволяющие регистрировать мизерные концентрации газов, всерьез обсуждается создание «искусственного носа», представляющего собой «мозаику» из молекул, чувствительных к различным газам.

Создание элементов молекулярной электроники требует решения целого ряда задач. Например, как подпаять проводок к такому элементу (устройства «ввода — вывода»)? Как наблюдать, что же у нас получилось в результате молекулярного строительства? Действительно, длина волны видимого света составляет $\sim 0,5$ мкм, а размер элементов — около 10 нм, т. е. в 50 раз меньше. Значит, увидеть отдельный элемент нельзя даже в лучший оптический микроскоп.

Для контроля пробных образцов, изготовленных по ленгмюровской технологии, используются более сложные методы наблюдения — например, рентгеноструктурный анализ. Обычно используется рентгеновское излучение с длиной волны $\lambda = 0,154$ нм. Излучение рассеивается на молекулярных элементах, создавая дифракционную картину, содержащую чередующиеся максимумы и минимумы, в этой картине и зашифровано изображение. Из положения максимумов по углу рассеяния (2θ) на первом этапе обработки результатов по формуле Вульфа — Брегга ($2d \sin\theta = n\lambda$) рассчитывают толщины молекулярных пленок (d) и расстояния между соседними молекулами, а затем с помощью расчетов на ЭВМ удается уточнить расположение в молекулярных элементах более мелких деталей — группировок атомов и даже отдельных атомов.

Итак, методика Ленгмюра позволяет в принципе использовать молекулы в качестве строительного материала для электронных схем. Можно надеяться, что созданные таким методом элементы молекулярной электроники через 5—10 лет будут реально использоваться.



*Доказать,
что в любой компании
из шести человек
найдутся трое людей
либо попарно
знакомых,
либо попарно
абсолютно незна-
комых.*

Мы предлагаем вам с небольшими сокращениями перевод с английского статьи известного американского популяризатора математики М. Гарднера «Математические игры», опубликованной в 1977 году в журнале «Scientific American».

РАМСЕЕВСКАЯ ТЕОРИЯ ГРАФОВ

М. ГАРДНЕР

Теория графов изучает множества точек, или вершин, соединенных линиями. Хотя несколько статей о рамсеевской теории графов были опубликованы в 30-х годах венгерским математиком Паулем Эрдешем и другими, серьезная работа по исследованию того, что теперь называется числами Рамсея, началась только в конце 50-х годов. Одним из стимулов исследования была приведенная на с. 14 невинно выглядящая головоломка.

Эту головоломку легко преобразовать в задачу о графах. Шесть вершин соответствуют шести людям. Соединим пару вершин, соответствующих двум знакомым людям, красной линией, а пару вершин, соответствующих двум незнакомым людям, синей линией. Теперь задача состоит в том, чтобы доказать, что, как бы мы ни выбирали цвета линий, у нас неизбежно получится или красный треугольник (соответствующий тройке попарно знакомых), или синий треугольник (соответствующий тройке попарно незнакомых).

Теория Рамсея, имеющая дело с такими задачами, названа по имени Фрэнка Пламптона Рамсея. Рамсею было всего 26 лет, когда он умер в 1930 году после тяжелой операции. Его отец был президентом колледжа Магдалины в Кембридже, а брат — архиепископом Кентерберийским. Экономисты знают Рамсея за его замечательный вклад в экономическую теорию. Логики знают Рамсея за его упрощения разветвленной теории типов Бертрана Расселла и за придуманное им подразделение логических парадоксов на логические и семантические.

В 1928 году Рамсей сделал доклад в Лондонском математическом обществе по ставшей теперь классической работе «Об одной проблеме в формальной логике». В этой работе Рамсей получил глубокий результат о множествах, который известен теперь как теорема Рамсея. Оказалось, что эта теорема, подобно многим теоремам о множествах, имеет большое число разнообразных неожиданных применений к комбинаторным задачам. Теорема эта в ее полной общности слишком сложна, чтобы объяснить ее здесь. Для наших целей будет достаточно посмотреть, как она применяется к теории раскрашивания графов.

Если каждая из n вершин соединена линией с каждой другой вершиной, то граф называется *полным графом с n вершинами* и обозначается символом K_n. При этом для нас неважно, как именно расположены вершины и проведены линии. На рисунке 1 показаны обычные способы изображения полных графов, имеющих от двух до шести вершин.

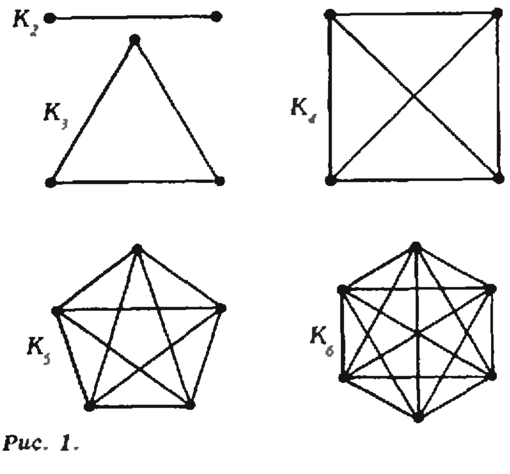


Рис. 1.

Предположим, что мы произвольным образом раскрасили линии графа K_n в красный или синий цвет. Мы можем раскрасить все линии в красный цвет, раскрасить все линии в синий цвет или использовать оба цвета. Такая раскраска называется *2-раскраской* графа. 2-раскраска есть, конечно, простой способ разбиения всех пар из наших n вершин на два непересекающихся класса. Аналогично, 3-раскраска линий разбивает эти пары на три непересекающихся класса, и вообще, r-раскраска разбивает пары вершин на r попарно непересекающихся классов.

Подграф полного графа — это какой-угодно граф, содержащийся в полном графе в том смысле, что все его вершины и линии принадлежат этому полному графу. Легко видеть, что всякий полный граф является подграфом всякого полного графа с бо́льшим числом вершин. Многие простые графы имеют названия. На рисунке 2 показаны четыре семейства графов: *цепи*, *циклы*, *звезды* и *колеса*. Заметим, что *колесо с четырьмя вершинами* есть просто другое изображение графа K_4.

Рассмотрим теперь задачу, в которой участвуют шесть карандашей различных цветов. Каждому цвету мы поставим в соответствие любой тип графа, какой нам нравится. Например:

1. *красный:* пятиугольник (пятивершинный цикл),
2. *оранжевый:* тетраэдр,
3. *желтый:* семивершинная *звезда*,
4. *зеленый:* 13-вершинная *цепь*,
5. *синий:* восьмивершинное *колесо*,
6. *фиолетовый:* галстук-бабочка (два треугольника ровно с одной общей вершиной).

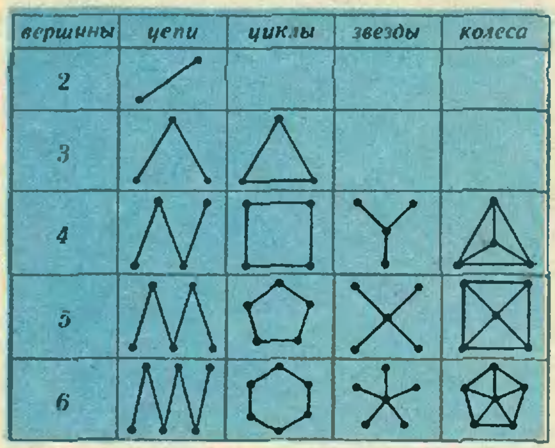


Рис. 2.

Зададим теперь любопытный вопрос. Существуют ли полные графы, при любой 6-раскраске которых обязательно получится подграф одного из перечисленных выше типов? Другими словами, как бы мы ни раскрашивали такой полный граф шестью карандашами, мы непременно получим либо красный пятиугольник, либо оранжевый тетраэдр, либо желтую семивершинную звезду, и т. д. Теорема Рамсея утверждает, что все полные графы, начиная с определенного конечного размера, обладают этим свойством. Наименьший граф из этого бесконечного семейства называется *графом Рамсея для заданного множества подграфов*. Число его вершин называется *числом Рамсея для этого множества подграфов*.

С каждым графом Рамсея связана как игра, так и головоломка. Игра в нашем примере заключается в следующем. Два игрока по очереди берут любой из шести карандашей и раскрашивают одну линию в графе Рамсея. Первый, кто закончит раскрашивание одного из заданных подграфов, считается проигравшим. Так как граф является графом Рамсея, игра не может закончиться вничью. Более того, граф Рамсея — это наименьший полный граф, на котором ничья невозможна.

Головоломка касается полного графа, имеющего на одну вершину меньше, чем граф Рамсея. Очевидно, это наибольший полный граф, на котором игра может закончиться вничью. Такой граф называется *критическим графом Рамсея для заданного множества подграфов*. Головоломка состоит в нахождении раскраски критического графа, при которой не возникает ни одного из заданных подграфов. Такая раскраска называется *критической раскраской*.

Я не имею понятия, чему равно число Рамсея для шести указанных подграфов. Соответствующий полный граф будет таким большим (содержащим сотни вершин), что об игре на нем не может быть и речи, а связанная с ним головоломка также настолько трудна, что лежит за пределами возможностей машинного поиска. Тем не менее игры и головоломки Рамсея с меньшими полными графами и с карандашами только двух цветов могут быть вполне занимательными.

Наиболее известная игра Рамсея называется *Сим**). Она играется на полном графе из шести вершин (K_6), который моделирует задачу о компании из шести человек. Нетрудно доказать, что 6 есть число Рамсея для следующих двух подграфов:

1. *красный:* треугольник (K_3),
2. *синий:* треугольник (K_3).

В классической теории Рамсея принято полные графы обозначать просто числами. Так что мы можем выразить приведенный выше результат компактной формулой: $R(3, 3)=6$. Это означает, что число вершин наименьшего полного графа, который при любой 2-раскраске обязательно содержит *одноцветный* (красный или синий) треугольник, равно 6.

Таким образом, если два игрока поочередно раскрашивают граф K_6 в красный или синий цвет, то один из них непременно проиграет, завершив построение одноцветного треугольника. Соответствующая головоломка весьма проста; она состоит в том, чтобы 2-раскрасить критический граф K_5 так, чтобы не было одноцветных треугольников.

Оказывается, если граф K_6 2-раскрашен, то обязательно найдутся по крайней мере два одноцветных треугольника. (Если их точно два и они разного цвета, они образуют *галстук-бабочку*.) Возникает интересный вопрос. Каково наименьшее число одноцветных треугольников, которые получаются при 2-раскраске полного графа с n вершинами? На этот вопрос первым ответил А. В. Гудман. Формулу Гудмана удобно разбить на три части:

если $n=2k$, то наименьшее число одноцветных треугольников равно $1/3\cdot k(k-1)(k-2)$;

если $n=4k+1$, то наименьшее число одноцветных треугольников равно $1/3\cdot 2k(k-1)(k+1)$;

если $n=4k+3$, то наименьшее число одноцветных треугольников равно $1/3\cdot 2k(k+1)(4k-1)$.

Таким образом, для полных графов, имеющих от 6 до 12 вершин, наименьшее число одноцветных треугольников равно соответственно 2, 4, 8, 12, 20, 28 и 40.

При случайной 2-раскраске будет, как правило, получаться больше одноцветных треугольников. Если раскраска графа Рамсея содержит в точности наименьшее число одноцветных треугольников, то она называется *экстремальной*. Всегда ли существует экстремальная раскраска, в которой все одноцветные треугольники имеют один и тот же цвет? В 1961 году Леопольд Сове показал, что ответ на этот вопрос утвердителен.*) Это порождает новый класс головоломок. Например, нарисуйте полный граф с 7-ю вершинами. Можете ли вы 2-раскрасить этот граф так, чтобы не получилось синих треугольников и получилось не более четырех красных треугольников? (Ответ см. на с. 73.)

Очень мало известно о «классических» числах Рамсея. *Классическое число Рамсея* — это число Рамсея, отвечающее ситуации, когда все графы из заданного множества являются полными. Способа, который позволял бы практически вычислять классические числа Рамсея, неизвестно. Алгоритм известен, конечно: нужно просто перебирать все возможные раскраски полных графов, поднимаясь по этой лестнице до тех пор, пока не будет найден граф Рамсея. Трудность этой задачи возрастает экспоненциально и к тому же с такой скоростью, что она быстро становится недоступной никакому компью-

*) М. Гарднер. *Математические новеллы.*— М.: Мир, 1974, гл. 33. Здесь и далее примечания С. В. Белого.

*) На самом деле ответ утвердителен только для четных n и $n=7$.

теру. Еще меньше известно о том, кто выигрывает — первый игрок или второй — при условии, что оба играют правильно. В случае игры Сим задача решена (выигрывает второй игрок), но почти ничего не известно об играх Рамсея, в которых участвуют бо́льшие полные графы.

Пока мы рассматривали только разновидность игры Рамсея, которую Фрэнк Харари, знаменитый специалист по теории графов, назвал *игрой уклонения*. Как он заметил, возможны, по крайней мере, три других типа игры. Например, в *игре достижения* (проводящейся на том же графе, что игра Сим) выигрывает первый игрок, который завершит построение одноцветного треугольника. Две другие игры продолжаются до тех пор, пока все линии не будут раскрашены, и выигравшим считается игрок, который завершил построение либо бо́льшего, либо меньшего числа одноцветных треугольников. Эти последние две игры являются наиболее трудными для анализа, а игра достижения — наиболее легкой. Ниже *под игрой Рамсея мы понимаем игру уклонения.*

Кроме числа $R(3,3)$, значение которого лежит в основе игры Сим, известно еще только пять нетривиальных классических чисел Рамсея для 2-раскрасок:

1. *R(3,4) равно 9.* При любой 2-раскраске графа K_9 мы обязательно получим красный тругольник (K_3) или синий тетраэдр (K_4). Никто не знает, кто выигрывает, если играть в соответствующую игру Рамсея.

2. *R(3,5) равно 14.*

3. *R(4,4) равно 18.* Таким образом, при любой 2-раскраске графа K_{18} обязательно получится одноцветный тетраэдр (K_4). (Это неплохая игра Рамсея, но играть в нее нелегко из-за трудности р а с п о з н а в а н и я тетраэдров.) Указанное свойство 2-раскрасок графа K_{18} соответствует тому факту, что *в любой компании из 18 человек найдется либо четверка попарно знакомых, либо четверка попарно незнакомых.*

4. *R(3,6) равно 18. В той же самой компании (из 18 человек) найдутся либо трое попарно знакомых, либо шестеро попарно незнакомых.* В каком отношении эти два множества находятся к двум тетраэдральным множествам из предыдущего примера — интересный вопрос, который как будто бы никто не исследовал.

5. *R(3,7) равно 23.**)

Заметим, что предыдущий список не содержит $R(5,5)$. Дело в том, что до сих пор никто не знает, чему равно число вершин полного графа, при любой 2-раскраске которого возникает одноцветный граф K_5. Стефан Барр из Отделения дальних связей американской телефонной и телеграфной компании, ведущий эксперт по рамсеевской теории графов, считает возможным, что число $R(5,5)$ никогда не будет найдено, настолько велик скачок в сложности. Даже задача нахождения числа $R(4,5)$, полагает он, настолько трудна, что и она, возможно, никогда не будет решена. В обоих случаях, однако, известны оценки: число $R(5,5)$ находится между 38 и 67 включительно, а число $R(4,5)$ — между 25 и 29 включительно**).

Известно еще одно классическое число Рамсея, но уже для 3-раскрасок. Это — число $R(3,3,3)$, и оно равно 17. Таким образом, *при любой 3-раскраске графа K_{17} обязательно получится одноцветный треугольник.* На самом деле получится несколько одноцветных треугольников, но точное число их неизвестно***).

Равенство $R(3,3,3)=17$ впервые было доказано в 1955 году. В игре Рамсея для этого графа используются карандаши трех цветов. Игроки поочередно раскрашивают линии графа в любой цвет, какой они хотят, пока один из игроков не проиграет, завершив построение одноцветного треугольника. Кто выигрывает, если оба игрока играют наилучшим образом? Никто не знает. Соответствующая головоломка Рамсея заключается в по-

---

*) Недавно с помощью ЭВМ было найдено еще одно классическое число Рамсея: $R(3,9)=36$

**) Сейчас эти оценки имеют вид: $42 \leqslant R(5,5) \leqslant 55$ и $25 \leqslant R(4,5) \leqslant 28$.

***) Недавно было доказано, что получится как минимум 4 или 5 одноцветных треугольников.

строении 3-раскраски критического графа K_{16}, при которой отсутствуют одноцветные треугольники. На четвертой странице обложки показано одно из двух существенно разных решений.

Что можно сказать о $R(3, 3, 3, 3)$ — числе вершин минимального полного графа, при любой 4-раскраске которого возникает одноцветный треугольник? Это число неизвестно, хотя верхнюю оценку — 64 — для него нашел Йон Фолкман — блестящий комбинаторщик, погибший в 1964 году в возрасте 31 года. Лучшая нижняя оценка — 51 — содержится в диссертации Фан Чунг — молодой китаянки из лабораторий Белла.

Существует много захватывающих обобщений классической теории Рамсея. Наиболее очевидное мы уже рассматривали; нахождение того, что называется обобщенными числами Рамсея для r-раскрасок полных графов, при которых обязательно возникают заданные подграфы, отличные от полных. Пионерами на этой территории были Вацлав Хватал и Харари; последние же пять лет раскопками на ней занимается Барр. Рассмотрим, например, задачу нахождения чисел вершин минимальных полных графов, в которых появляется одноцветная звезда с n вершинами. Для 2-раскрасок эту задачу первым решил Харари. В 1973 году Барр и Робертс решили ее для произвольного числа цветов.

Другая обобщенная задача Рамсея заключается в нахождении чисел Рамсея для 2-раскрасок полных графов, при которых появляется определенное число «разобщенных» одноцветных треугольников. (Треугольники называются *разобщенными*, если они не имеют общих вершин.) В 1975 году Барр, Эрдеш и Спенсер доказали, что если число разобщенных треугольников равно $d \geq 2$, то соответствующее число Рамсея равно $5d$. Для раскрасок более чем в два цвета задача остается нерешенной.

Для *колес* задача не решена в общем случае даже для двух цветов. Число вершин для *колеса с четырьмя вершинами*, т. е. для тетраэдра, равно, как мы видели, 18. *Колесо*

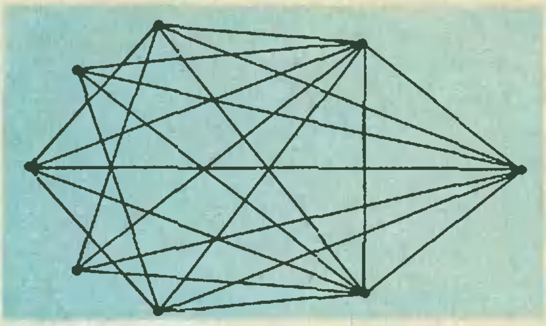


Рис. 3.

с пятью вершинами (т. е. «колесо с втулкой и четырьмя спицами») имеет число Рамсея 15. Для колеса с шестью вершинами задача не решена, хотя известно, что в этом случае число Рамсея лежит в пределах от 17 до 20 включительно. *Предполагаемое* его значение равно 20.*) Если оно действительно равно 20, то полные графы с 17-ю, 18-ю и 19-ю вершинами обладают 2-раскраской без *шестивершинного* (с пятью «спицами») *колеса*. Было бы весьма интересно получить такую раскраску хотя бы для K_{17}.

В 1968 году Рональд Грэхем, один из ведущих американских комбинаторщиков**), нашел остроумное решение одной проблемы рамсеевского типа, поставленной Эрдешем и Хайналом. *Каков наименьший граф, не содержащий K_6, при любой 2-раскраске которого возникает одноцветный треугольник?* Грэхем нашел единственное решение, которое представляет собой восьмивершинный граф, показанный на рисунке 3. Читатель может попытаться доказать, что этот граф обладает нужным свойством.

Что будет, если в последней задаче граф K_6 заменить другим полным графом? Вопрос бессмыслен для K_3, потому что K_3 — это и есть треугольник. В случае графа K_5 задача не решена. Наилучшее известное решение — это 18-вершинный граф, построенный Робертом Ирвингом в

*) Недавно Фаудри доказал, что это число не больше 19.

**) В этом номере (с. 21) мы публикуем интервью с Рональдом Грэхемом. (*Примеч. ред.*).

1973 году*). Случай графа K_1 еще дальше от решения. Фолкман в работе, опубликованной посмертно, доказал, что такой граф Рамсея существует. Однако число вершин графа, который дает конструкция Фолкмана, столь громадно, что его невозможно даже записать, не прибегая к специальным ухищрениям. Эрдеш установил премию в 100 долларов тому, кто найдет решение этой проблемы, содержащее менее миллиона вершин *).

Граф Фолкмана — драматическая иллюстрация огромных трудностей, которые возникают в проблеме Рамсея, даже если в формулировке проблемы не участвует граф более чем с четырьмя вершинами.

*) Болгарские математики Н. Г. Хадживанов и Н. Д. Ненов построили пример 15-вершинного графа; они же доказали, что требуемый граф не может содержать менее 12 вершин.

*) Франкл и Рёдль недавно доказали, что существует граф Фолкмана с числом вершин n, меньшим 10^{12}.

Вселенная как тепловая машина

(Начало см. на с. 2)

должны записать

$$\varrho_* l_{\max}^2 = \text{const}'''. \qquad (4)$$

Мы уже говорили, что объем замкнутого мира $V \approx l^3$. По порядку величины этот объем в максимуме расширения равен $l_{\max}^3$, а полная масса материи М во Вселенной —

$$\varrho_* l_{\max}^3 = M. \qquad (5)$$

Поделив (5) на (4), получим:

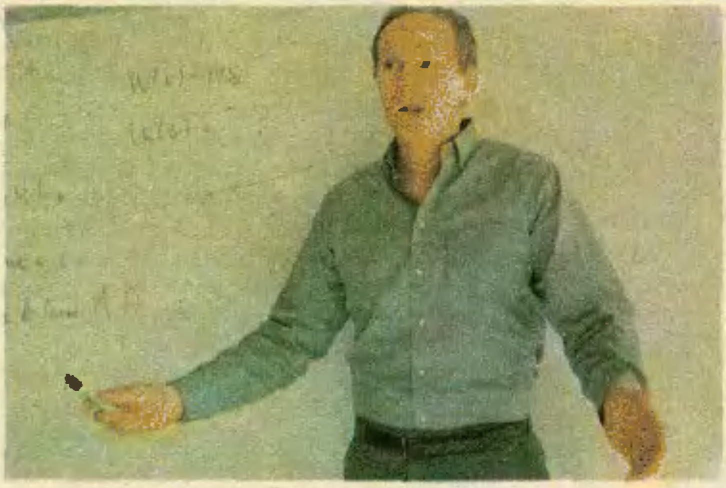
$$l_{\max} = \frac{M}{\text{const}'''}.$$

Итак, $l_{\max}$ пропорционально полной массе материи во Вселенной М. Но масса М складывается из суммы масс частиц, энергии их движения и энергии фотонов. Тепловая энергия все время увеличивается (согласно второму закону термодинамики). Это означает, что будет расти и М, а значит — и пропорциональная ей величина $l_{\max}$, характеризующая амплитуду пульсаций Вселенной. Таким образом, имеет место не затухание пульсаций, а их раскачка! Такой вывод был получен в 1934 году американским физиком Р. Толменом. Откуда берется энергия на раскачку? Очевидно, раскачка идет за счет отрицательной энергии гравитационного поля (так что сумма положительной энергии и отрицательной не меняется, закон сохранения энергии выполняется).

Согласно выводу американского физика Р. Толмена, так меняется во времени радиус кривизны Вселенной.

Возможно ли, что наша реальная Вселенная описывается рассмотренной моделью? Вряд ли это так. Дело в том, что хотя никакого подобия старой картины «тепловой смерти» не существует, но в ходе пульсаций тепло, энтропия все более накапливаются. Если бы было бесконечное число пульсаций, то и энтропия накопилась бы бесконечная. А этого нет. Значит, бесконечного числа пульсаций не было. Но тогда исчезает главная привлекательная черта модели — ее бесконечное время существования в прошлом. И мы снова возвращаемся к проблеме начала. О том, как решается эта проблема современной наукой, читатель сможет узнать из уже упоминавшейся книги «Как взорвалась Вселенная?».

Развеяв один миф — миф о «тепловой смерти Вселенной», — наука пришла к новой не менее загадочной проблеме — проблеме начала расширения Вселенной. Именно на решении этой проблемы сосредоточено сейчас внимание специалистов-космологов. Таков вечный путь познания, проникновения в тайны природы, когда что-то познанное порождает еще более грандиозные вопросы.



Рональд Грэхем, действительный член Национальной академии наук США, является одним из крупнейших в мире специалистов по комбинаторике, идеи и методы которой используются во всех без исключения областях математики и точного естествознания. Находясь в Москве, профессор Грэхем согласился дать интервью для «Кванта».

ИНТЕРВЬЮ С ПРОФЕССОРОМ РОНАЛЬДОМ ГРЭХЕМОМ

— Профессор Грэхем, когда и каким образом вы впервые заинтересовались математикой? Что повлияло на ваш выбор: семья, учителя, книги, соревнования?

— Сильный интерес к математике я впервые почувствовал в начальной школе, в третьем или четвертом классе. Особенно хорошо помню, как, познакомившись с алгоритмом извлечения квадратных корней — вы знаете этот старый итерационный алгоритм,— я заинтересовался, возможно ли сделать то же самое для кубических корней и для более высоких степеней. И я нашел аналогичный способ решения. Меня поддержал учитель, хорошо относившийся к моим увлечениям.

Позднее, когда я учился в младших классах средней школы, мне помогали два других учителя. Видя, что я могу решить любую задачу по алгебре, учитель мне как-то сказал: «Вот задача, которую ты решить не сможешь». В задаче речь шла о скорости роста популяции мышей, зависящей от их численности, т. е. мне пришлось бы иметь дело с дифференциальным уравнением. Что же, учитель оказался прав — задачу решить я не смог. Тогда он дал мне учебник анализа и сказал: «Если хочешь узнать решение — прочти эту книгу». Я так и сделал. Тогда математика меня и захватила.

До этого я увлекался звездами, собирался стать астрономом. Только позднее я узнал, что наблюдение за звездами — это еще далеко не вся астрономия. Но эта наука интересует меня по-прежнему. Кроме диплома математика у меня есть еще один — по физике.

Дома мне мало чем могли помочь. Дело в том, что в нашей семье я первым закончил колледж.

— Как вы стали математиком-исследователем?

— Насколько я помню, в средней школе и на младших курсах университета такой цели я для себя не ставил — мне просто было интересно заниматься математикой. Потом, в 1950 году, я начал подготовку по специальной программе, дававшей право поступления в университет еще до окончания средней школы. Чтобы заниматься по этой программе, необходимо сдать определенные тестовые экзамены. По математике я оказался лучшим в Соединенных Штатах. В 15 лет я поступил в Чикагский университет, в котором знаменитый просветитель Р. М. Хатчинс ввел тогда систему гуманитарного образования «Книги классиков». Суть ее заключалась в том, что студенты читали не о Ньютоне, а самого Ньютона (или Дарвина) в оригинале. В начале обучения проводилось тестирование, выявлявшее, что студент знает, а что — нет. Как оказалось, я хорошо знал математику, физику, химию, но гораздо хуже — психологию, общественные науки, французский. В принципе, изучение гуманитарных дисциплин было полезным, хотя и не отвечало моим научным интересам.

Проучившись три года в Чикаго, я поступил в Калифорнийский университет, где занялся электротехническим машиностроением. Я проучился еще год, но диплома у меня по-прежнему не было. Если после четырех лет обучения в колледже студент не имел диплома, тогда его могли призвать в армию. Чтобы этого не случилось со мной, я в 1955 году пошел добровольцем в ВВС. Три года я служил на Аляске. Заняться там было особенно нечем, и я поступил в колледж, закончил его и получил диплом физика. Хотя я прослушал много курсов по математике, диплом математика я не получил: этот колледж не имел права давать диплом по математике.

После демобилизации я вернулся в Калифорнийский университет (в Беркли) и проучился там еще три года в аспирантуре. Работу на звание доктора философии я написал под руководством профессора Д. Г. Лехмера, еще когда учился в Беркли, до военной службы. Позднее Лехмер стал моим научным руководителем. Таким образом, я, как говорится, вышел на широкую дорогу, и тогда же (в 1961 году) я поступил в знаменитые лаборатории фирмы Белл, где с тех пор и работаю.

За это время я несколько раз был приглашенным профессором математики или информатики в Стандорфе, в Калифорнийском технологическом институте, в Калифорнийском университете и в Принстоне. Я принимаю такие приглашения потому, что занятия со способными студентами всегда дают хороший импульс в работе.

— Профессор Грехем, вы — серьезный математик, но, кроме того, вы еще и... виртуозный жонглер. Расскажите об этом.

— Я заинтересовался жонглированием сразу после поступления в университет. Сейчас у меня высокий рост и атлетическое телосложение, тогда я был младше своих сокурсников и ниже их ростом. Поэтому мне трудно было наравне со всеми заниматься наиболее популярными в США видами спорта — баскетболом и американским футболом. В Чикагском университете я стал заниматься гимнастикой, и притом не совсем обычной. Это была смесь гимнастики, танца, жонглирования и упражнений на одноколесном велосипеде. Тогда я и открыл для себя жонглирование. Кроме того, я занялся прыжками на батуте. По существу, это тоже одна из форм жонглирования, в которой «предметом» является сам человек.

— Имеет ли жонглирование какое-нибудь отношение к вашей любви к математике?

— Взаимосвязь между математикой и жонглированием гораздо сильнее, чем это может показаться. Из трех тысяч членов международной ассоциации жонглеров довольно значительная часть занимается вычислительной наукой. На мой взгляд, общность математики и жонглирования хорошо подмечена в следующем высказывании: «Главная трудность жонглирования в том, что шар летит только туда, куда его бросают». Т. е. все зависит от человека. В составлении программ ситуация точно такая же: человек пишет программу, а компьютер делает то, что ему приказано. Здесь встает вопрос управления: жонглирование очень алгоритмично, в нем есть ритмы, модели, и конца этому нет, как нет предела совершенствованию — всегда хочется добавить еще один шар. В математике все то же самое: каждый ответ рождает два новых вопроса, и так до бесконечности.

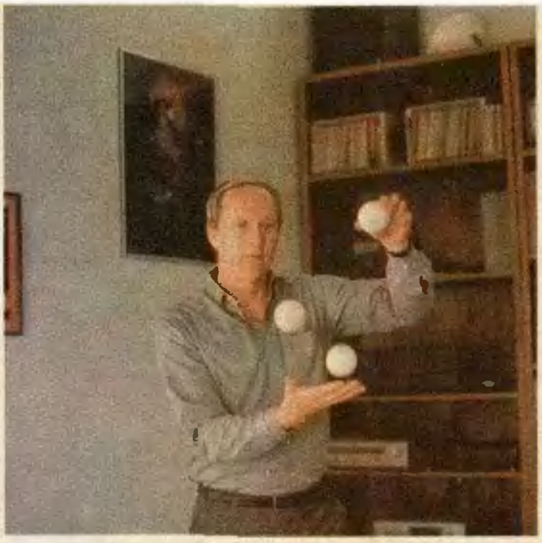
— Что вам больше по душе: разработка теории или решение задач? Идете ли вы от методики к решению задач или в обратном направлении?

— Я отвечу на Ваш вопрос иначе, чем сделал бы это мой коллега, знаменитый венгерский математик П. Эрдеш, который решение задач ставит выше всего остального и разработал сравнительно мало систематических теорий. Я бы сказал так: сначала обычно работаешь над решением конкретной задачи, потом подмечаешь какую-то закономерность. Но как только появляется методика, применимая к решению всех задач данного типа, ее можно развить, и она превращается в теорию.

Область математики, в которой я работаю — комбинаторика. Долгое время ее считали тихой заводью топологии. Лет двенадцать тому назад французский математик Ж. Дьедонне назвал комбинаторику «математикой на завтрак». Думаю, он имел в виду, что это лишь преддверие главного этапа ее развития. Есть и другая крайность: иной раз, говоря о комбинаторике, ее называют «комбинаторной теорией». Как теория, она еще не сравнима с алгебраической топологией или дифференциальной геометрией, хотя в них многие ключевые результаты и носят комбинаторный характер.

Конкретные задачи можно рассматривать как ступени создания методики или теории: если методика хороша для решения данной конкретной задачи, значит исследование идет по верному пути. Здесь возникает и более глубокий вопрос: создана ли математика искусственно или она существует вечно? Большинство математиков, которых я знаю, уверены, что математика в каком-то смысле существовала и раньше, а ученый просто открывает ее для людей. Но тут можно спросить: как же в таком случае быть с музыкой, с Бетховеном? Открыл ли он фортепианную сонату, посвященную Вальдштейну*) или создал ее? Ответ, наверное, можно сформулировать следующим образом: принципы, которые легли в основу сонаты, существовали, но их непосредственное применение, сами ноты — все уже сотворено композитором. То же относится и к математике: мож-

*) Соната № 21 До мажор «Аврора». (*Примеч. перев.*).



но придумать конкретное доказательство, но не его основополагающие принципы. Теория чисел, теорема о разложении на простые множители останутся без изменения и на другой планете. В других областях, например в квантовой механике, наблюдение может изменить или создать наблюдаемое, хотя это и кажется несколько таинственным.

Возвращаясь к вашему вопросу, хочу добавить, что решить конкретную задачу всегда интересно, но это еще не дает полного удовлетворения. Нужно идти дальше: открыть методику гораздо важнее, чем получить отдельный результат.

— Один из наших читателей прислал нам следующую задачу, связанную с гипотезой Эрдеша: n бесконечных арифметических прогрессий покрывает первые 2^{2^n} натуральных чисел; доказать, что они покрывают весь натуральный ряд. Что вы можете сказать про эту задачу?

— Это утверждение, или его вариант с заменой 2^{2^n} на $2n!$, сравнительно несложно доказать по индукции. Но дело в том, что сама гипотеза Эрдеша (в которой вместо 2^{2^n} фигурирует 2^n — и эта оценка уже точная!) доказана Криттенденом и Ван ден Эйденом (1969 г.). Доказательство трудное, о нем коротко не расскажешь.

При решении подобных задач очень важен первый этап — убедиться, справедлива ли гипотеза: вы то пытаетесь строить контрпримеры, то — доказываете какие-то частные случаи, более слабые утверждения или следствия гипотезы; так происходит, пока вы окончательно не обретете уверенность в справедливости того, что доказываете.

— Задачи на арифметические прогрессии связаны с именем Ван-дер-Вардена. Имеются ли хорошие задачи по этой тематике?

— Вот интересная задача, связанная с теоремой Ван-дер-Вардена: Обозначим, в его честь, через $W(k)$ наименьшее натуральное число такое, что при любом разбиении чисел от 1 до $W(k)$ на два класса, хотя бы в одном из них найдется k-членная арифметическая прогрессия. (Ван-дер-Варден доказал, что $W(k)$ существует при любом k.) Легко видеть, что $W(2)=3$, $W(3)=9$; известно еще, что $W(4)=35$, $W(5)=178$, но уже $W(6)$ не найдено даже с помощью компьютера. Я предлагаю гипотезу, что $W(k)$ растет не быстрее, чем «башня» из k двоек $2^{2^{\cdot^{\cdot^{2}}}}$. Но есть основания сомневаться даже в этой оценке: есть некоторые похожие комбинаторные задачи, связанные с именем Рамсея, где встречаются функции, растущие еще быстрее. Вы знаете, есть такая широко известная на Западе «Книга рекордов Гинесса». Так вот, там есть «самое большое число, реально использованное в математическом доказательстве». Оно было придумано мной в связи с одной задачей теории Рамсея.

— Одна задача такого «рамсеевского» типа, которой также занимался Эрдеш, недавно обсуждалась в «Кванте»: из какого наименьшего числа $S(k)$ точек на плоскости можно заведомо выбрать k точек, лежащих в вершинах выпуклого k-угольника? Есть гипотеза Секереша, что $S(k)=2^{k-2}+1$. Видимо, надежд на ее доказательство в общем случае пока не прибавилось?

— Да, найти значение $S(k)$ или даже дать хорошие его оценки — видимо, очень трудная задача. Задачу можно варьировать: доказать, что при большом числе точек N среди всех k-угольников с вершинами в этих N точках доля выпуклых составляет не менее C_k, где $C_k>0$ зависит только от k, и пытаться оценивать C_k. А вот еще вариант этой задачи: найти из какого числа $n=f(k)$ точек всегда можно выбрать «пустой» выпуклый k-угольник (т. е. такой, внутри которого больше нет ни одной из этих n точек). Оказывается, такое $f(k)$ существует для $k=3$, 4 и 5, а для $k\geqslant 7$ его просто не существует. Для $k=6$ — никто ничего не знает.

А вообще эту задачу Эрдеш называет «задачей со счастливым концом»: дело в том, что ею вместе с Секерешом увлеклась его аспирантка Эстер Клейн, и все это кончилось тем... что аспирантка стала женой Секереша.

— Могли бы вы сказать что-нибудь об истоках теории Рамсея, привести простые примеры теорем рамсеевского типа?

— В качестве почти шуточного, но типичного примера рамсеевской теоремы приведу такое утверждение:

*среди любых 6 людей всегда существует 3 попарно знакомых или 3 попарно незнакомых.**) Такие теоремы возникали и до Рамсея. Например, есть такая известная теорема И. Шура, доказательство которой, пожалуй, по плечу наиболее подготовленным читателям «Кванта»; *при любой раскраске чисел натурального ряда в два цвета существует монохроматическое решение (x, y, z) диофантового уравнения $x+y=z$* (т. е. решение, составленное из чисел x, y, z одного цвета). Занимаясь более тщательным изучением истории, я пришел к выводу, что впервые теорема рамсеевского типа появлялась в трудах Д. Гильберта в 1892 году.

— Если уж говорить о предыстории теории Рамсея, не кажется ли вам, что следует ее вести не от результатов Шура, а скорее от принципа ящиков Дирихле?

— Ну, это уж слишком далекая история, это времена Адама и Евы!

— Есть задачи, которые неожиданно завоевывают популярность. Например, вы, конечно, слышали о такой: начав с некоторого натурального x_1, положим $x_{n+1}=x_n/2$, если x_n четно, и $x_{n+1}=(3x_n+1)/2$, если x_n — нечетно; всегда ли в этой последовательности встретится 1 (после чего она зацикливается)? Недавно школьники принесли нам лист с огромными машинными экспериментами, показывающими, как непредсказуемо поведение этой последовательности. Кажутся ли вам подобные задачи интересными?

— О таких задачах — просто формулируемых, но порой очень сложных,— трудно заранее сказать, есть ли в них какая-либо математическая идея, сложны они или нет, стоит ли на них тратить большие усилия. Но среди задач про «итерации» есть поистине удивительные. Например, вы знаете, как обычно сложно могут вести себя последовательности, задаваемые простыми формулами типа $x_{n+1}=x_n(a-x_n)$. Возьмем такую, более сложную, формулу: $x_{n+2}=(1+x_{n+1})/x_n$. Оказывается (если в ней не встречается 0 или -1), она всегда периодична с периодом 5. А $x_{n+3}=(1+x_{n+1}+x_{n+2})/x_n$ — с периодом 8. Есть ли еще подобные примеры? (Кажется, для линейных выражений в числителе и знаменателе их больше нет, но из многочленов более высокой степени их можно сконструировать.)

Еще пример: положим

$$x_{n+1}=[\sqrt{2x_n(x_n+1)}],\quad x_1=1,$$

где [...] — «целая часть»; тогда первые члены будут 1, 2, 3, 4, 6, 9, 13. Ясно, что x_n растет примерно как $\sqrt{2}n$, так что x_{n+2} примерно вдвое больше x_n. Оказывается, $d_n=x_{2n+1}-2x_{2n+1}$ будет 0 или 1, и если записать их по порядку, то мы получим 1,011010100 ...— в точности двоичную запись $\sqrt{2}$! Для $\sqrt{3}$, например, ничего подобного я уже не знаю.

Последний пример: пусть $\psi_1=2$, $\psi_{n+1}=\psi_n-1/\psi_n$. Будет ли ψ_n неограниченным? Ответ почти наверняка положительный, но никто это не умеет доказать.

— Считаете ли вы, что вычислительная наука, информатика, поглотит математику?

— Это довольно трудный вопрос. Большинство наиболее талантливых ученых в США пользуются компьютерами с самого начала своей научной деятельности. Если их интересуют графы или числа, то на компьютере можно проводить самые разнообразные эксперименты. Играя в компьютерные игры, школьники в США начинают пользоваться компьютерами в возрасте 6—7 лет. Потом круг математических занятий можно расширить с помощью тех же компьютеров.

Ситуация на рынке рабочей силы такова, что спрос на специалистов по вычислительным методам огромен. Поэтому многие талантливые молодые люди рассматривают компьютеры в контексте своей будущей профессии.

Как молодые, так и уже признанные математики приходят к выводу, что вычислительный эксперимент является источником важных и интересных задач. Например, на Международном конгрессе в Беркли результаты трех из шестнадцати пленарных докладов были построены на использовании компьютеров. Работа многих математиков связана с «гиперкубическими машинами». В них входит около 64 000 процессоров, соединен-

*) См. статью М. Гарднера в этом номере. *(Примеч. ред.)*

ных в топологии 16-мерного куба. Такие машины являются источниками интереснейших математических задач.

Идет нескончаемая дискуссия о том, «поглотит» ли информатика математику или наоборот. Использование в информатике особо сложных математических результатов свидетельствует о большей ее зрелости. Возьмем к примеру Адлемана и Хуанга, которые занимаются доказательством простоты целых чисел с помощью так называемого «криптографического экрана RSA». В своей работе они опираются на глубокие теоретические результаты Фалтингса, получившего в 1986 году медаль Филдса. Если в вычислительной науке используются такого рода сложнейшие результаты алгебраической геометрии, то это значит, что информатика не стоит на месте.

С другой стороны, для того чтобы математика сохраняла свою жизнеспособность, ей нужны настоящие задачи; традиционными же источниками задач являлись физика и астрономия. Замыкаясь в себе, математика становится бесплодной, примером чему служит такая ее ветвь, как теория категорий. В таком случае необходимо вернуться назад, к некогда питавшим математику корням. Сегодня одним из главных источников задач становится вычислительная наука. Но при этом компьютеры не заменили мышления ученого.

В завершении я бы сказал, что взаимоотношения между математикой и вычислительной техникой приобретают характер симбиоза.

— Как один из организаторов Международного конгресса математиков в Беркли (лето 1986 года) и приглашенный докладчик Всемирного конгресса общества Бернулли в Ташкенте (осень 1986 года), не хотели бы вы сказать несколько слов об отношениях между советскими и американскими учеными?

— Как председателю правления организационного комитета конгресса в Беркли, мне было очень приятно, что в нем приняло участие такое значительное число приглашенных докладчиков из Советского Союза — более, чем когда-либо в прошлом. Мы надеемся, что и в дальнейшем эта тенденция сохранится.

На мой взгляд, сотрудничество между советскими и американскими математиками расширяется. В этом плане хорошим признаком можно считать конгресс общества Бернулли в Ташкенте. Это крупнейший форум математиков, состоявшийся в Советском Союзе со времен Международного конгресса математиков 1966 года. Я думаю, что конгресс в Ташкенте прошел успешно.

Конечно, одним из препятствий является элементарный языковой барьер. Американцы печально известны своей неохотой изучать иностранные языки. Поэтому большое значение приобретает эффективный обмен переводными математическими изданиями — книгами, журналами.

В Советском Союзе много сильных математиков. Было бы очень жаль, если их коллеги за рубежом не смогли бы оперативно знакомиться с полученными в СССР результатами. Здесь можно отметить последовательный характер математических исследований. Работа каждого ученого строится на результатах других. Еще Ньютон говорил: «Если мне и удавалось видеть немного дальше других, то лишь потому, что я стоял на плечах гигантов».

Например, большой интерес вызвали результаты советского ученого А. Разборова. Недавно они были улучшены американским математиком Р. Смоленским. Рукопись работы уже передана Разборову, и я уверен, что это существенно ускорит ход его дальнейших исследований. Такого рода мелочи дают порой большие результаты.

Конечно, будут еще препятствия и преграды. Но математики любят трудные задачи. На этот случай бытует поговорка:

Атак те задачи достойны,
Которые держатся стойко.

На будущее я смотрю с большим оптимизмом.

Беседу провел *А. Б. Сосинский*
Перевод с английского *М. М. Романовской*

Задачник „Кванта"

Задачи

M1096 — M1100, Ф1108 — Ф1112

M1096. Диаметр d окружности разбит на k равных частей, и через каждую точку деления проведена хорда, перпендикулярная диаметру. Докажите, что сумма длин всех хорд не меньше $0{,}5\,kd$ и меньше $0{,}8\,kd$.

Р. Харитонов, А. Чагиров (ученики 10 класса)

M1097. Координаты вершин равнобедренного треугольника — целые числа. Докажите, что квадрат основания — четное число.

В. В. Произволов

M1098. На окружности расставлены n точек, занумерованных подряд числами 1, 2, ..., n. Двое играют в следующую игру. Каждый по очереди проводит хорду, соединяющую две точки с номерами одной четности. Любая хорда не должна иметь общих точек (даже концов) с проведенными ранее. Побеждает тот, кто делает последний ход. При каждом $n=4, 5, 6, \ldots$ выясните, кто из игроков имеет выигрышную стратегию: начинающий или его партнер.

В. Г. Чванов

M1099. В отряде, ведущем подготовку к полету на Марс, 6783 космонавта, причем известно, что среди любых четырех из них можно выбрать троих, составляющих слаженный экипаж для посадочного модуля. Докажите, что можно выбрать 5 космонавтов, любые трое из которых составляют слаженный экипаж.

Н. Н. Силкин, М. В. Волков

M1100. На берегу прямолинейной реки лежат бревна (не пересекающие друг друга отрезки; рис. 1). Каждое бревно составляет с линией берега угол меньше 45°. Докажите, что для любого расположения бревен обязательно найдется бревно, которое можно закатить в реку, не задевая остальных. (Поворачивать бревно при качении не разрешается.)

В. Г. Ильичев

Ф1108. Для наглядной демонстрации воздействия лазерного излучения на вещество изготовлена мишень в виде маленького серебряного шарика, закрепленного в вершине легкого пустотелого конуса (рис. 2). Одна сторона шарика отполирована, а другая зачернена. Мишень устанавливают основанием конуса на шероховатую горизонтальную плоскость и на поверхности шарика-мишени фокусируют излучение от мощного импульсного лазера.

Оцените, при какой минимальной энергии светового импульса произойдет опрокидывание мишени. На какую из сторон шарика (отражающую или поглощающую) следует направить излучение?

Считайте, что масса шарика $m=3$ г и много больше массы конической подставки; высота конуса $h=6$ см, диаметр основания $d=3$ мм; коэффициент отражения отполированной поверхности $r=0{,}99$, коэффициент поглощения зачерненной поверхности $a=0{,}99$; длительность лазерного импульса $\tau=10$ нс.

Е. Н. Юносов, И. В. Яминский

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.

Решения задач из этого номера следует отправлять не позднее 1 июля 1988 года по адресу: 103006 Москва К-6, ул. Горького, 32/1, «Квант». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. На конверте в графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» № 4 — 88» и номера задач, решения которых вы посылаете, например «M1096» или «Ф1108». В графе «...адрес отправителя» фамилию и имя просим писать разборчиво. В письмо вложите конверт с написанным на нем вашим адресом (в этом конверте вы получите результаты проверки решений).

Условие каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «...новая задача по математике»).

В начале каждого письма просим указывать номер школы и класс, в котором вы учитесь.

Рис. 1.

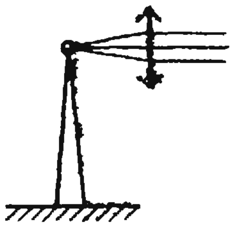


Рис. 2.

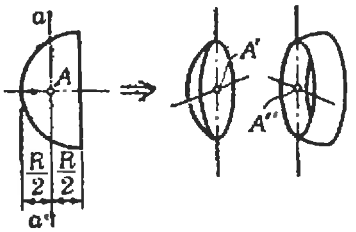


Рис. 3.

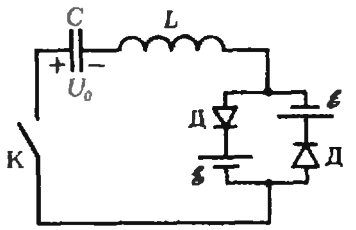


Рис. 4.

Задачник „Кванта"

Ф1109. С наклонной плоскости скатываются две бутылки: одна — пустая, другая — заполненная водой. Какая из них скатится быстрее? Какая из этих бутылок поднимется на бо́льшую высоту, если их пустить вверх по наклонной плоскости с одинаковыми начальными скоростями? Считать, что проскальзывания нет.

А. И. Буздин

Ф1110. Почему, когда при температуре около 0 °С ешь мороженое, пар изо рта начинает идти сильнее?

А. Ю. Алексеев

Ф1111. Равномерно заряженную полусферу разрезали на две части так, как показано на рисунке 3 (по линии aa'), и эти части разнесли на большое расстояние. В какой точке напряженность электрического поля больше — в точке A' или в точке A'' (см. рисунок)?

С. Ф. Ким, А. И. Латынин

Ф1112. В схеме, приведенной на рисунке 4, при разомкнутом ключе К конденсатор заряжен до некоторого напряжения U_0. Ключ замыкают, и через какое-то время ток в цепи прекращается. Какова должна быть величина U_0, чтобы напряжение на конденсаторе установилось равным $U_y = 1$ В при изменившейся полярности пластин, если ЭДС каждой батареи в цепи $\mathcal{E} = 1{,}5$ В? Диоды считать идеальными.

А. И. Киркинский

Problems

M1096 — M1100, P1108 — P1112

We have been publishing Kvant's contest problems every month from the very first issue of our magazine. The problems are nonstandard ones, but their solution requires no information outside the scope of the USSR secondary school syllabus. The more difficult problems are marked with a star (*). After the statement of the problem, we usually indicate who proposed it to us. It goes without saying that not all these problems are first publications. The solutions of problems from this issue (in Russian or in English) may be posted no later than July 1st, 1988, to the following address: USSR, Moscow, 103006. Москва К-6, ул. Горького, 32/1, «Квант». Please send the solutions of physics and mathematics problems, as well as problems from different issues, under separate cover; on the

M1096. The diameter d of a circle is divided into k equal parts and a chord perpendicular to the diameter is drawn through each dividing point. Prove that the total length of all the chords is not less than $0.5kd$ and less than $0.8kd$.

R. Kharitonov, A. Chagirov (10th form students)

M1097. The coordinates of the vertices of an isoceles triangle are integers. Prove that the square of the base is an even number.

V. V. Proizvolov

M1098. n points on the circle are numbered in order 1, 2, ..., n. Two play the following game. Each player in turn draws a chord joining points of the same parity. Each chord has no common points and no common end points with any other. The player who makes the last move wins. For each $n = 4, 5, 6, \ldots$ determine which player (the one making the first move or his opponent) has a winning strategy.

V. G. Chvanov

M1099*. A group of 6783 astronauts prepares for a flight to Mars. It is known that among any four of them three can be chosen, forming a compatible crew for the landing module. Prove that it is possible to chose 5 astronauts, any three of whom constitute a compatible crew.

N. N. Silkin, M. V. Volkov

M1100*. Logs (non intersecting segments) lie near the rectilinear shore of a river, each forming an angle of less than 45° with the shoreline. Prove that one of the logs may be rolled into the river envelope write the words: «KVANT'S PROBLEMS» and the numbers of all the solved problems; in your letter enclose an unstamped selfaddressed envelope — we shall use it to send you the correction results. At the end of the academic year we sum up the results of the Kvant problem contest. If you have an original problem to propose for publication, please send it to ns under separate cover, in two copies (in Russian or in English), including the solution. On the envelope write NEW PROBLEM IN PHYSICS (or MATHEMATICS). Please print yonr name and address in BLOCK LETTERS.

Задачник „Кванта"

without changing direction or touching the other logs (see figure Рис. 1 on p. 27). The number of logs is finite.

V. G. Il'ichev

P1108. To demonstrate the effect of laser rays on matter, a special target, consisting of a small silver ball fixed at the vertex of a light empty cone, was designed (see figure Рис. 2). One side of the ball is polished, the other blackened. The target is placed so that the base of the cone lies on a rough horizontal surface. The laser ray from a powerful impulse laser is focused on the silver ball. Estimate the minimal energy of light impulse needed to overturn the target. To what side of the ball (the reflecting or absorbing one) should the ray be directed? You may assume that the mass of the ball is $m=3$g and is much greater than that of the supporting cone; the height of the cone is $h=6$cm, the diameter of its base is $d=3$mm; the coefficient of reflection from the polished surface is $r=0.99$, the absorbtion coefficient of the blackened surface is $a=0.99$; the duration of the laser impulse is $\tau=10$ns.

E. N. Yunosov, I. V. Yaminski

P1109. Two bottles, one empty, the other filled with water, roll down an inclined plane. Which will roll down faster? Which of these bottles will roll up to the highest level if they are sent back up the inclined plane with the same initial velocity. It may be assumed that there is no slippage.

A. I. Buzdin

P1110. When one eats ice cream when the temperature is about 0 °C, more vapor comes out of one's mouth. Why?

A. Yu. Alekseev

P1111. A uniformly charged half sphere was cut into two pieces as shown on figure Рис. 3 (along the line aa') and these two parts were moved far away from each other. Where is the value of the electric field greater — at the point A' or at the point A'' (see the figure)?

S. P. Kim, A. I. Latynin

P1112. In the circuit shown on figure Рис. 4, with the switch K disconnected, the capacitor is charged up to the voltage U_0. The switch is then turned on, and after a certain time current ceases to flow in the circuit. For what value of U_0 will the established voltage on the capacitor equal $U_e=1$ V (with the polarities of the plates interchanged), if the EMF of each source is $\mathcal{E}=1.5$ V? The diodes may be assumed ideal.

A. I. Kirkinski

Решения задач

M1071, M1076 — M1080, Ф1088 — Ф1092

M1071. *На доске нарисовано поле для игры в «цифры» (см. рисунок справа).*

Двое играющих ходят по очереди. Первый игрок начальным ходом записывает на месте первого (самого левого) пробела (—) какую-нибудь цифру. Каждый дальнейший ход состоит в том, чтобы записать цифру на месте очередного пробела и заменить стоя-

((((((((__*__)*__)*__)*__)*__)*__)*__)*__)*__)

Ответ: выигрывает первый игрок. Чтобы выиграть, он должен, пока это возможно, записывать нечетную цифру, причем на первых четырех своих ходах операцию он может выбирать произвольно, а на последнем (пятом) — так, чтобы промежуточный результат стал четным (т. е. сложение, если предыдущий результат и выписываемая цифра нечетны, и умножение во всех *щую слева звездочку (*) на знак сложения или умножения; при этом ни одна цифра не должна встречаться дважды. В конце игры вычисляется значение полученного выражения. Если это четное число, то выигрывает первый игрок, нечетное — второй. Кто выигрывает при правильной игре?*

Задачник „Кванта"

других случаях). Поскольку у второго игрока к последнему ходу останется заведомо четная цифра, независимо от выбора операции окончательный результат будет четным.

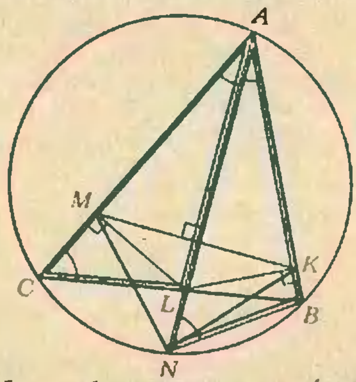
С. А. Генкин

М1076. *Биссектриса угла A остроугольного треугольника ABC пересекает сторону BC в точке L, а описанную окружность треугольника — в точке N (отличной от A); K и M — основания перпендикуляров, опущенных из L на стороны AB и AC. Докажите, что четырехугольник $AKNM$ равновелик треугольнику ABC.*

Площадь треугольника ABC равна $(AB \cdot AC \cdot \sin\alpha)/2$, где $\alpha = \angle BAC$, а площадь четырехугольника $AKNM$ равна $AN \cdot KM/2$ (поскольку, очевидно, его диагонали AN и KM перпендикулярны). Поэтому достаточно доказать, что

$$AB \cdot AC \cdot \sin\alpha = AN \cdot KM.$$

Треугольники ACL и ANB подобны ($\angle CAL = \angle NAB$,



так как AL — биссектриса, а $\angle ACL = \angle ANB$, так как эти углы опираются на одну и ту же дугу AB окружности ABC). Следовательно, $AB/AN = AL/AC$, т. е. $AB \cdot AC = AL \cdot AN$. Остается заметить, что $KM = AL \cdot \sin\alpha$ (KM — это хорда окружности с диаметром AL, на которую опирается вписанный в эту окружность угол KAM величины α).

И. А. Кушнир

М1077. *Пусть $p_n(k)$ — число перестановок множества из n ($n \geqslant 1$) элементов, имеющих ровно k неподвижных точек. Докажите, что:*

а) $\sum_{k=0}^{n} k \cdot p_n(k) =$
$= 0 \cdot p_n(0) + 1 \cdot p_n(1) + \ldots$
$\ldots + n \cdot p_n(n) = n!$;

б) $\sum_{k=0}^{n} (k-1)^2 p_n(k) = n!$.

а) Заметим прежде всего, что

$$\sum_{k=0}^{n} p_n(k) = n!, \qquad (1)$$

так как в левой части стоит суммарное число перестановок, имеющих $0, 1, \ldots, n$ неподвижных точек, т. е. просто число всех перестановок. Теперь докажем, что при $1 \leqslant k \leqslant n$

$$kp_n(k) = np_{n-1}(k-1), \qquad (2)$$

считая, что $p_0(0) = 1$. Для этого подсчитаем двумя способами число N пар (f, i), где f — произвольная перестановка n элементов с k неподвижными точками, а i — любая из этих точек ($f(i) = i$). С одной

Примечание. Перестановкой конечного множества S называется взаимно однозначное отображение f множества S на себя; число всех перестановок множества из n элементов равно n!=1 · 2 · ... · n. Элемент a множества S называется неподвижной точкой перестановки f, если f(a)=a.

стороны, каждая из этих $p_n(k)$ перестановок входит в k пар, поэтому $N=kp_n(k)$. С другой стороны, если $f(i)=i$, то на множестве из $n-1$ элементов, отличных от i, перестановка f имеет $k-1$ неподвижных точек, следовательно, каждый из n элементов i входит в $p_{n-1}(k-1)$ пар, т. е. $N=np_{n-1}(k-1)$.

Суммируя равенства (2) по $k=1, \ldots, n$ и учитывая (1) (с заменой n на $n-1$), получим

$$\sum_{k=0}^{n} kp_n(k)=n\sum_{k=1}^{n} p_{n-1}(k-1)=n\cdot(n-1)!=n!.$$

б) Докажем сразу более общее тождество

$$s(n, m)=\sum_{k=m}^{n}\frac{k!}{(k-m)!}p_n(k)=n! \qquad (3)$$

при всех $n\geqslant m$, $m=0, 1, 2, \ldots$ (по определению, $0!=1$). При $m=0$ оно совпадает с (1), при $m=1$ — с утверждением а), а при $m=2$ эквивалентно б), поскольку

$$\sum_{k=0}^{n}(k-1)^2p_n(k)=\sum_{k=0}^{n}k(k-1)p_n(k)-\sum_{k=0}^{n}kp_n(k)+\sum_{k=0}^{n}p_n(k)=s(n, 2)-s(n, 1)+s(n, 0).$$

Из тождества (2) следует, что при $1\leqslant m\leqslant k\leqslant n$

$$\frac{k!}{(k-m)!}p_n(k)=k(k-1)\ldots(k-m+1)p_n(k)=$$
$$=n(k-1)\ldots(k-m+1)p_{n-1}(k-1)=$$
$$=n(n-1)(k-2)\ldots(k-m+1)p_{n-2}(k-2)=\ldots$$
$$\ldots=n(n-1)\ldots(n-m+1)p_{n-m}(k-m)=$$
$$=\frac{n!}{(n-m)!}p_{n-m}(k-m).$$

Суммируем эти равенства по $k=1, 2, \ldots n$:

$$s(n, m)=\frac{n!}{(n-m)!}s(n-m, 0)=n!.$$

Другое доказательство (3) можно получить из почти очевидного соотношения $p_n(k)=C_n^k p_{n-k}(0)$, где $C_n^k=n!/(k!(n-k)!)$ — число k-элементных подмножеств множества из n элементов (число сочетаний).

Наш читатель Л. М. Коганов (Москва) сообщил еще об одном обобщении этой задачи, принадлежащем американскому математику Дж. Голдману: если $S(q, i)$ — это число разбиений множества $\{1, 2, \ldots, q\}$ на i непустых непересекающихся множеств, то

$$\sum_{k=0}^{n}k^q p_n(k)=n!\sum_{i=1}^{m}S(q, i),$$

где $m=\min(n, q)$. Доказательство этого соотношения, предложенное Л. М. Когановым, напоминает вывод формулы (2) и сводится к подсчету двумя способами количества пар (f, φ), где f — произвольная перестановка множества из n элементов, а φ — произвольное отображение множества $\{1, 2, \ldots, q\}$ в множество неподвижных точек перестановки f.

В. Н. Дубровский

Задачник «Кванта»

М1078. *Функция f определена на множестве N_0 всех неотрицательных целых чисел и принимает значения в этом множестве. Докажите, что равенство $f(f(n))=n+1987$ не может выполняться для всех n из N_0.*

Допустим, что утверждение задачи неверно и функция f, удовлетворяющая равенству $f(f(n))=n+1987$ при $n\in N_0$, существует. Тогда

$$f(n+1987)=f(f(f(n)))=f(n)+1987,$$

и, следовательно,

$$f(n+1987k)=f(n)+1987k \qquad (*)$$

при всех $n, k\in N_0$. Рассмотрим теперь произвольное целое r, $0\leqslant r\leqslant 1986$, и поделим число $f(r)$ на 1987 с остатком:

$$f(r)=1987p+q,\ 0\leqslant q\leqslant 1986.$$

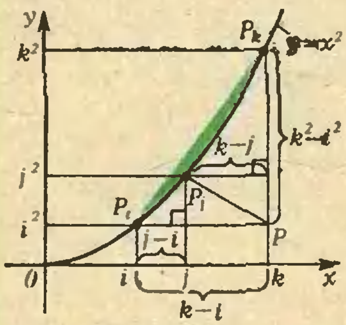
По условию $f(f(r))=r+1987$,
и в силу (*) $f(f(r))=f(q+1987p)=f(q)+1987p$.
Поскольку $r\leqslant 1986$, возможны только два случая:

1) $p=0$, т. е. $f(r)=q$, а $f(q)=r+1987$;
2) $p=1$, т. е. $f(r)=q+1987$, а $f(q)=f(f(r))-1987=r$.

В обоих случаях, очевидно, $f(r)\neq f(q)$, а значит, $r\neq q$. Таким образом, множество 0, 1, ..., 1986 можно разбить на пары (a, b) так, что в каждой паре $f(a)=b$, $f(b)=a+1987$. Но в этом множестве нечетное число элементов. Полученное противоречие показывает, что функции с требуемыми свойствами не существует.

В. В. Вавилов

М1079. *Пусть n — натуральное число, $n\geqslant 3$. Можно ли расположить на плоскости n точек так, чтобы расстояние между любыми двумя выражалось иррациональным числом, а площадь треугольника с вершинами в любых трех — рациональным числом (отличным от нуля).*



$S_{P_iP_jP_k}=S_{PP_iP_k}-S_{PP_jP_k}-S_{PP_iP_j}$

Ответ: можно; искомыми точками являются, например, точки $P_i\ (i;\ i^2)$, $i=1, 2, ..., n$, т. е. точки на параболе $y=x^2$ с натуральными абсциссами.

В самом деле,

$$P_iP_j=\sqrt{(j-i)^2+(j^2-i^2)^2}=|j-i|\sqrt{1+(j+i)^2}.$$

Но число вида $1+m^2$ (у нас $m=j+i$) не может быть квадратом рационального числа r, потому что в таком случае r было бы натуральным и из равенства $r^2=1+m^2$ получалось бы противоречивое неравенство:

$$1=r^2-m^2=(r-m)(r+m)\geqslant r+m>1.$$

Таким образом, все расстояния P_iP_j иррациональны.

В то же время площадь треугольника $P_iP_jP_k$ при $i<j<k$, как видно из рисунка, равна

$$\frac{1}{2}((k-i)(k^2-i^2)-(k-j)(k^2-i^2)-(k-i)(j^2-i^2)),$$

т. е. рациональна.

Вообще, площадь любого треугольника, вершины которого имеют целые координаты, рациональна. Это показывает, что условия задачи легко выполнимы: можно брать любой набор точек целочисленной решетки, заботясь лишь о том, чтобы расстояния между ними были иррациональны.

В. В. Вавилов

М1080. *Пусть q — натуральное число, $q\geqslant 2$. Докажите, что если k^2+k+*

Достаточно доказать, что если среди чисел от 0 до $q-2$ есть такое k, что $f(k)=k^2+k+q$ — составное, то такое число есть и в промежутке от 0 до $\sqrt{q/3}$.

$+q$ — простое число для всех целых k, где $0 \leqslant k \leqslant \sqrt{q/3}$, то k^2+k+q — простое для всех целых k, где $0 \leqslant k \leqslant q-2$.

Задачник „Кванта"

Пусть y — наименьшее целое неотрицательное число, такое что $f(y)$ — составное. Обозначим через p наименьший простой делитель $f(y)$, тогда $f(y) \geqslant p^2$. Ниже мы докажем, что если $y \leqslant q-2$, то $p \geqslant 2y+1$, ввиду чего

$$y^2+y+q \geqslant (2y+1)^2 = 4y^2+4y+1,$$

и, следовательно, $y^2 < q/3$, т. е. $y < \sqrt{q/3}$.
Итак, остается доказать, что $p \geqslant 2y+1$ при $y \leqslant q-2$.

Предположим противное: $p \leqslant 2y$ и рассмотрим разность

$$f(y)-f(x) = (y-x)(y+x+1).$$

Когда x изменяется от 0 до $y-1$, выражение $y-x$ принимает значения $y, y-1, \ldots, 1$, а $y+x+1$ — значения $y+1, y+2, \ldots, 2y$. Следовательно, при некотором x, $0 \leqslant x \leqslant y-1$, число $f(y)-f(x)$ делится на p. Но в силу выбора y и p число $f(y)$ делится на p, а $f(x)$ — простое, поэтому $f(x)$ должно быть равно p. В то же время

$$y-x < y+x+1 \leqslant q+x-1 < q+x+x^2 = f(x),$$

поэтому $p=f(x)$ не может делить $(y-x)(y+x+1)$. Противоречие.

Заметим, что результат задачи применим к знаменитому трехчлену Эйлера $f(x)=x^2+x+41$: легко проверить, что $f(x)$ простое для $x=0, 1, 2, 3$, а отсюда (поскольку $\sqrt{41/3}<4$) следует, что $f(x)$ — простое для всех 40 целых x от 0 до 39.

В. Ф. Лев

Ф1088. *Невесомая лестница закреплена во вращающемся со скоростью $f=10$ об/мин невесомом подвесе так, что может свободно качаться относительно верхней ступеньки (рис. 1). Обезьяна массой $m=30$ кг начинает спускаться по лестнице. На каком расстоянии l от подвеса она будет находиться, когда вертикальное положение лестницы перестанет быть устойчивым?*

Рис. 1.

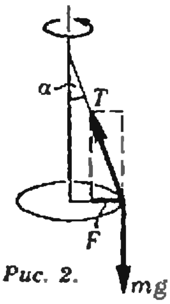


Рис. 2.

Пусть лестница отклонилась от вертикали на малый угол α. В этот момент движение обезьяны будем рассматривать как движение по окружности радиусом $\sim l\alpha$ (рис. 2). Центростремительное ускорение обезьяны —

$$a=(2\pi f)^2 l\alpha.$$

Это ускорение ей может сообщить сила реакции T со стороны лестницы — это единственная сила, которая имеет проекцию F на горизонтальную плоскость. Если $F>ma$, то обезьяна (с лестницей) будет возвращаться к вертикали — вертикальное положение лестницы будет устойчивым.

Из рассмотрения сил (рис. 2) ясно, что $F=mg\alpha$. Из условия

$$mg\alpha > m(2\pi f)^2 l\alpha$$

находим:

$$l < g/(2\pi f)^2 = 10 \text{ м}.$$

При l большем 10 м равновесие неустойчивое.

А. В. Андрианов

Задачник „Кванта"

Ф1089. *При перелете со станции «Мир» на станцию «Салют-7», которые находились на одной орбите, наши космонавты затормозили свой корабль, перешли на более низкую орбиту и за время $t=30$ часов нагнали «Салют-7», который летел впереди «Мира» на расстоянии $L=3000$ км. Считая орбиты круговыми, определить, на сколько километров промежуточная орбита ниже основной. Высота обеих орбит много меньше радиуса Земли $R_З=6400$ км.*

Запишем разность угловых скоростей корабля на промежуточной орбите и станции:

$$\omega_1R_1t-\omega_2R_2t=(\omega_1R_1-\omega_2R_2)t=R_Зt(\omega_1-\omega_2)\approx L \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (\omega_1-\omega_2)=L/R_Зt \qquad (1)$$

(мы учли, что высоты орбит малы по сравнению с радиусом Земли, т. е. $R_1\approx R_2\approx R_З$). В то же время, учитывая, что $\omega=\frac{v}{R}=\sqrt{\frac{GM}{R^3}}=\sqrt{\frac{gR_З^2}{R^3}}$ (M — масса Земли), можем записать:

$$\omega_1-\omega_2=\sqrt{gR_З^2}\left(\sqrt{\frac{1}{R_1^3}}-\sqrt{\frac{1}{R_2^3}}\right)=$$
$$=\sqrt{gR_З^2}\left(\sqrt{\frac{1}{(R_2-\Delta R)^3}}-\sqrt{\frac{1}{R_2^3}}\right)\approx$$
$$\approx\sqrt{\frac{g}{R_З}}\left(\sqrt{\frac{1}{(1-\Delta R/R_З)^3}}-1\right)\approx\sqrt{\frac{g}{R_З}}\,\frac{1/(1-\Delta R/R_З)^3-1}{\sqrt{1/(1-\Delta R/R_З)^3}+1}\approx$$
$$\approx\sqrt{\frac{g}{R_З}}\,\frac{3\Delta R/R_З}{2}. \qquad (2)$$

Приравняв выражения (1) и (2), найдем ΔR:

$$\Delta R=\frac{2L}{3t}\sqrt{\frac{R_З}{g}}\approx 15 \text{ км}.$$

М. В. Семенов

Ф1090. *Ясной морозной ночью посмотрите на небо. Какие звезды мерцают более заметно: находящиеся высоко над горизонтом или низко, и почему?*

Мерцание звезд обусловлено турбулентными потоками воздуха в земной атмосфере, которые возникают из-за неравномерного прогрева атмосферы. В основном это восходящие потоки, возникающие из-за разности температур земной поверхности и прилегающих к ней слоев воздуха. Эти потоки приводят к тому, что плотность атмосферы в данном месте непрерывно меняется. Соответственно, меняется показатель преломления, и поэтому идущие от звезд лучи света преломляются то в одном, то в другом направлении — звезды мерцают. Этот эффект особенно заметен вблизи Земли; поэтому «низкие» звезды, лучи которых по пути к наблюдателю проходят больший путь вблизи Земли, чем лучи «высоких» звезд, мерцают заметнее.

А. С. Бутов

Ф1091. *Подвешенный на нерастяжимой нити длиной l шарик с массой m и зарядом q находится в центре обруча, по которому равномерно распределен заряд Q (рис. 1). Радиус обруча R; заряды q и Q одноименные. Определить*

Пусть шарик сместился на малое расстояние Δx ($\Delta x\ll R$) от центра обруча (смещение по вертикали при этом пропорционально Δx^2, и мы им пренебрежем, считая, что движение происходит в плоскости обруча). Посмотрим, какая сила $F_э$ действует на заряд q шарика со стороны заряда обруча Q. Из соображений симметрии (см. рис. 2) понятно, что напряженность поля, создаваемого зарядом Q в точке A, направлена вдоль радиуса обруча. Так же направлена и сила $F_э$.

частоту малых колебаний шарика. Воспользоваться формулой $(1+x)^\alpha \approx 1+\alpha x$ $(x \ll 1)$.

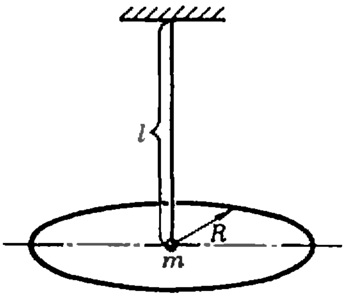


Рис. 1.

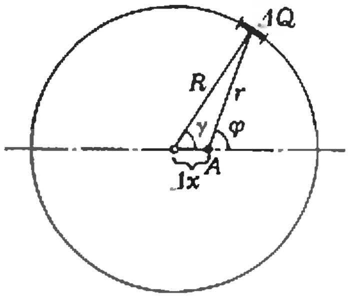


Рис. 2.

Задачник „Кванта"

Чтобы найти $F_э$, посчитаем силу $f_э$, действующую на заряд q со стороны малого элемента обруча, находящегося на расстоянии r от заряда q (см. рис. 2). Заряд этого элемента —

$$\Delta Q = \frac{Q}{2\pi R} R \cdot \Delta\gamma = \frac{Q}{2\pi}\Delta\gamma \approx \frac{Q}{2\pi}\Delta\varphi$$

($\varphi \approx \gamma$, поскольку $\Delta x \ll R$). Выразим r через R и Δx (воспользовавшись теоремой косинусов):

$$r^2 = R + (\Delta x)^2 - 2R\cdot\Delta x\cdot\cos\gamma \approx R^2 + (\Delta x)^2 - 2R\cdot\Delta x\cdot\cos\varphi \approx R^2 - 2R\cdot\Delta x\cdot\cos\varphi.$$

Таким образом,

$$f_э = -k\frac{\Delta Q\cdot q}{r^2} \approx -k\frac{Qq}{2\pi}\frac{1}{R^2 - 2R\cdot\Delta x\cdot\cos\varphi}\Delta\varphi.$$

Полная сила $F_э$ равна $\int_0^{2\pi} f_э \cos\varphi\, d\varphi$, т. е.

$$F_э = -k\frac{Qq}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\cos\varphi}{R^2 - 2R\cdot\Delta x\cdot\cos\varphi}d\varphi =$$

$$= -k\frac{Qq}{2\pi R^2}\int_0^{2\pi}\frac{\cos\varphi}{1 - \frac{2\Delta x}{R}\cos\varphi}d\varphi \approx$$

$$\approx -k\frac{Qq}{2\pi R^2}\int_0^{2\pi}\left(1 - \frac{2\Delta x}{R}\cos\varphi\right)^{-1}\cos\varphi\, d\varphi \approx$$

$$\approx -k\frac{Qq}{2\pi R^2}\int_0^{2\pi}\left(1 + \frac{2\Delta x}{R}\cos\varphi\right)\cos\varphi\, d\varphi =$$

$$= -k\frac{2Qq\cdot\Delta x}{2\pi R^3}\int_0^{2\pi}\cos^2\varphi\, d\varphi = -k\frac{Qq\cdot\Delta x}{\pi R^3}\int_0^{2\pi}\frac{1+\cos 2\varphi}{2}d\varphi =$$

$$= -k\frac{Qq\cdot\Delta x\cdot\pi}{\pi R^3} = -k\frac{Qq}{R^3}\Delta x.$$

Теперь запишем уравнение движения шарика:

$$m(\Delta x)'' = -\left(mg\sin\alpha + k\frac{Qq\cdot\Delta x}{R^3}\right),$$

где α — угол отклонения нити маятника от вертикали. Поскольку нас интересуют малые колебания, $\sin\alpha \approx \Delta x/l$, и

$$m(\Delta x)'' = -\Delta x\left(m\frac{g}{l} + k\frac{Qq}{R^3}\right).$$

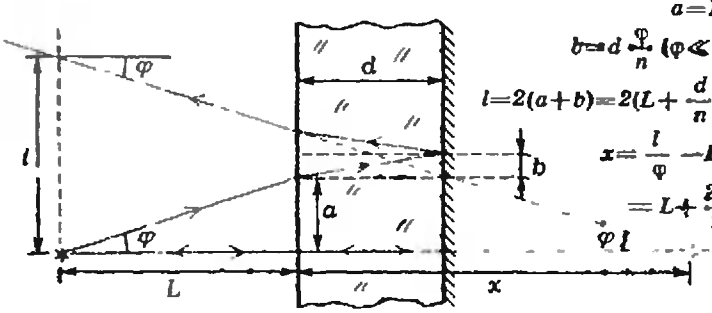
Это — уравнение гармонических колебаний с частотой

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l} + k\frac{Qq}{R^3 m}}.$$

Г. В. Григорьев

Задачник „Кванта"

Ф1092. *Найти положение изображения точечного источника, находящегося на расстоянии L от передней поверхности толстой плоскопараллельной стеклянной пластины, посеребренной с задней стороны (см. рисунок). Изображение рассматривается перпендикулярно к поверхности пластины. Толщина пластины d, показатель преломления стекла n.*



$$a=L\varphi,$$
$$b=d\frac{\varphi}{n}\ (\varphi\ll 1);$$
$$l=2(a+b)=2\left(L+\frac{d}{n}\right)\varphi;$$
$$x=\frac{l}{\varphi}-L=L+\frac{2d}{n}.$$

На рисунке выполнено построение изображения в пластине. Как видно из рисунка, изображение находится за пластиной на расстоянии $x=\frac{l}{\varphi}-L=L+\frac{2d}{n}$ от ее передней поверхности.

В. К. Петерсон

Избранные школьные задачи

Восьмой класс

1. Решите систему уравнений

$$\begin{aligned} x_1+x_1x_2&=1,\\ x_2+x_2x_3&=1,\\ \cdots&\cdots\\ x_{99}+x_{99}x_{100}&=1,\\ x_{100}+x_{100}x_1&=1. \end{aligned}$$

2. Докажите, что существует натуральное число, куб которого оканчивается на 1987.

3. Даны 3 целых положительных числа. Их наибольший общий делитель равен 1, сумма любых двух делится на третье. Найдите эти числа.

4. Даны три положительных числа x, y, z. При каком условии существует треугольник, высоты которого имеют длины x, y, z?

5. В одной книге описан такой случай. Резиновый мяч влетает в дверь комнаты, отражается от стены, потом — от другой стены и, не задев ни одного предмета, вылетает в дверь в точности там, где он влетел. Могло ли это быть?

Девятый класс

6. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sin x+\sin y=\sqrt{2}\sin a,\\ \cos x+\cos y=\sqrt{2}\cos a. \end{cases}$$

7. Квадратное уравнение $x^2+px-q=0$ имеет решения. Числа p и q изменили, каждое не более чем на 1 % от его абсолютной величины. Известно, что получившееся уравнение также имеет решения. Можно ли гарантировать, что бо́льшее из решений нового уравнения отличается от бо́льшего из решений старого уравнения не более, скажем, чем на 10 % от абсолютной величины последнего?

8. Каков наименьший возможный радиус круга, в котором можно расположить четыре неперекрывающихся круга радиусом 1?

9. Даны четыре отрезка длиной a, b, c, d. При каком условии из них можно составить замкнутую самопересекающуюся ломаную, никакие три вершины которой не лежат на одной прямой?

10. Нарисуйте график функции

$$y=|1-|1-|1-|1-|1-x|||||.$$

Десятый класс

11. Решите в целых положительных числах уравнение $x^y=48\,261\,724\,457$.

12. Найдите общую область определения функций

$$f_n(x)=\underbrace{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x+\ldots+\sqrt{x+1}}}}}_{n}.$$

13. Дан многогранник, ни одно плоское сечение которого не имеет больше 4 сторон. Докажите, что это — тетраэдр.

14. Прямой круговой цилиндр и прямой круговой конус имеют общее основание. Объем каждого из них равен 1. Найдите объем их общей части.

15. При каких a и b формула $\sqrt{x}\approx ax+b$ гарантирует наибольшую точность при $4\leqslant x\leqslant 9$? Другими словами, при каких a и b наибольшее значение выражения $|\sqrt{x}-(ax+b)|$ при $4\leqslant x\leqslant 9$ является наименьшим?

Публикацию подготовил Д. Б. Фукс

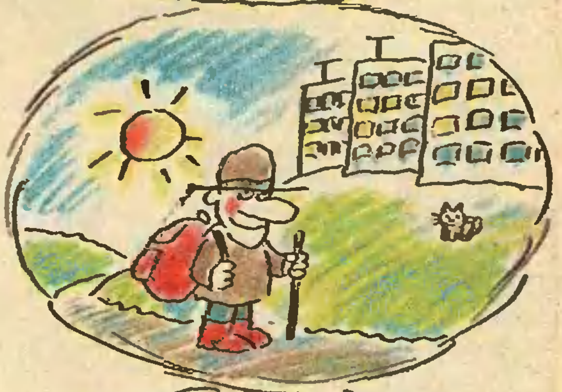
Задачи

1. Мите подарили микрокалькулятор. Возводя числа 2 и 5 в одинаковые степени, он обнаружил, что числа $2^5=32$ и $5^5=3125$ начинаются с одной и той же цифры — 3. Могут ли одинаковые степени чисел 2 и 5 начинаться с другой (одной и той же для обоих чисел) цифры?

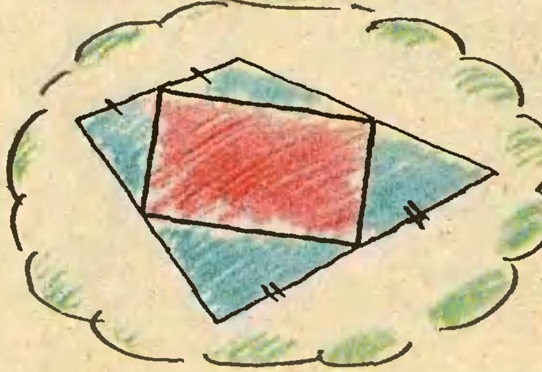
2. Решите ребус, изображенный на рисунке (одинаковым буквам соответствуют *одинаковые цифры, разным* — разные).

3. Маугли попросил своих друзей-обезьян принести ему орехов. Обезьяны набрали поровну орехов и понесли Маугли. По дороге они поссорились, и каждая обезьяна бросила в каждую по ореху. В результате Маугли досталось лишь 33 ореха. По скольку орехов собрали обезьяны (известно, что каждая обезьяна принесла больше одного ореха)?

4. Город раскинулся на восточном склоне горы. Утром усталый путешественник, расположившийся у подножия горы, видит отражение солнца в оконных стеклах. Он замечает, что «светящиеся окна» со временем перемещаются: в одних домах — «гаснут», а в других — «зажигаются». Куда они перемещаются: вверх или вниз, налево или направо? Объясните это явление.



5. Вокруг прямоугольника описан четырехугольник так, что две противоположные вершины прямоугольника являются серединами двух противоположных сторон четырехугольника (см. рисунок). Докажите, что площадь прямоугольника равна половине площади четырехугольника.



Эти задачи нам предложили: Г. А. Гальперин, Абрам Арба, ученик 9-го класса из Киева С. Ляшенко, А. И. Буздин, В. В. Произволов.

ДЕСЯТЬ ЦИФР

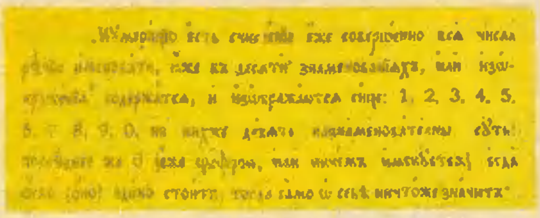
Кандидат
физико-математических наук
А. П. САВИН

Грамотность начинается с умения писать и считать. Уже в 3-4 года, поднимаясь по лестнице, мы уверенно считаем ступеньки: «Раз, два, три, четыре, пять, ...». А в первом классе пишем в тетради цифры:

1234567890

Эти цифры называются *арабскими*, хотя арабы лишь передали в Европу индийскую десятичную систему счисления с ее цифрами. Об этом мы читаем в «Книге абака» итальянского математика Леонардо Пизанского (Фибоначчи): «Девять индусских знаков следующие: 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1. С помощью этих знаков и знака 0, который называется по-арабски «сифр», можно написать какое угодно число». Фибоначчи, издавший свою книгу в 1202 году, многое почерпнул из знакомства с математическими трудами арабов. Любопытно, что сам порядок цифр при их перечислении: 9, 8, 7, ... отражает их заимствование у арабов, поскольку арабы пишут справа налево, а не слева направо.

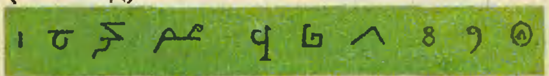
Наверное, вы уже поняли, что слово «цифра» произошло от названия нуля у арабов, а в России еще очень долго слово «цифра» означало значок нуля. Поглядите на кусочек текста из «Арифметики» Магницкого (1703).



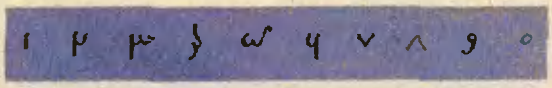
Переводится на современный русский язык этот текст так: «Нумерация есть счет или способ представлять совершенно все числа с помощью десяти знаков, которые изображаются так: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0. Из них девять — значащие, а последний же 0 (который цифрой нуль, или ничем, именуется) сам по себе ничего не значит, когда стоит отдельно.»

Обратите внимание, что буквы в старинном тексте еще сильно отличаются от современных, а цифры — те же, что и в ваших учебниках. Но, конечно же, они не сразу стали такими. В 200 году в Индии они имели вид:

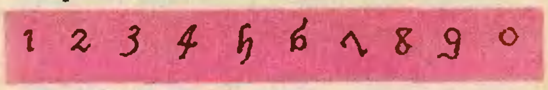
Со временем написание цифр совершенствовалось, причем по-разному в разных местностях Индии. Появился нуль и возникла позиционная система записи чисел. Арабы выбрали из этих различных видов цифр наиболее удачные. От них цифры продолжили свой путь по Земле. Вот как они выглядят у римского писателя Боэтия (600 год):



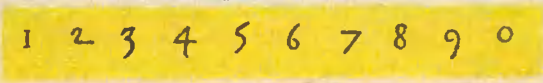
В 1350 году в сочинениях греческого монаха Максима Плануда мы видим их такими:



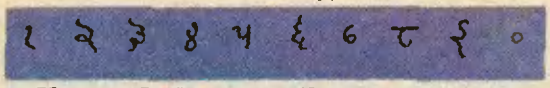
В 1480 году в книге «Зеркало Вселенной» англичанина Какстона они изображаются вот так:



И лишь в 1522 году в книге итальянца Тонсталля они приобретают более-менее современный вид:

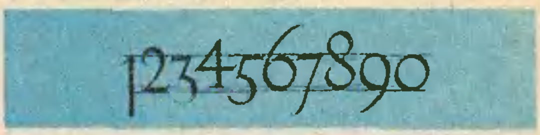


Любопытно, что в самой Индии цифры тоже видоизменялись и к началу XX века стали выглядеть так:



Хотя в XVI веке в Европе уже было сильно развито книгопечатание, цифры в книгах того времени, как мы видим, очень похожи на рукописные. Многие художники работали над созданием разнообразных типографских шрифтов — над формой букв и цифр,— стараясь придать им приятный для глаза вид (при этом каждый знак должен был достаточно сильно отличаться от другого). Вот один из цифровых штрифтов:

Но история цифр на этом не кончается. Совсем недавно в ряде стран стали использовать вот такую запись:



Чем эти цифры лучше обычных? А тем, что у четных цифр «хвостики» идут вверх, а у нечетных — вниз. Теперь труднее спутать, скажем, цифры 2 и 5. Правда, это нововведение широко не привилось, но вот такое начертание цифр знакомо каждому из вас:

Такие цифры мы видим на микрокалькуляторах и ручных электронных часах. С помощью набора семи отрезков удается достаточно «узнаваемо» изобразить каждую из десяти цифр.

Еще одно изображение цифр, связанное с потребностями техники, мы видим на обороте каждого почтового конверта:

Здесь в написании цифр участвуют уже девять отрезков. Эти цифры предназначены для электронной машины, сортирующей корреспонденцию. Жирные черточки над индексом на конверте нужны для того, чтобы машина смогла точно настроиться на написанный нами индекс:

Коль мы уже заговорили об электронных машинах, то отметим, что хотя они воспринимают от нас числа в десятичной записи и в том же виде выдают нам результаты вычислений, но для «внутренних нужд» они поль-

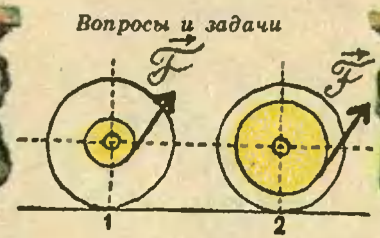
(Окончание см. на с. 42)

Архимед пустил в ход свои машины

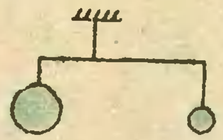
Плутарх

А так ли хорошо знакомы вам простые машины?

Вопросы и задачи

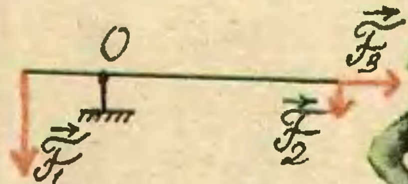


1. В какую сторону будут двигаться катушки, изображенные на рисунке, под действием небольшой силы F?



2. На невесомом рычаге уравновешены стальные шары. Нарушится ли равновесие, если шары погрузить в воду?

Вопросы и задачи

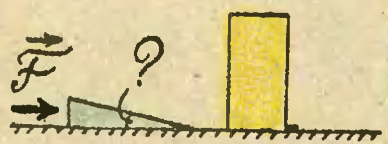


4. Рычаг уравновешен, как показано на рисунке, силами F_1 и F_2. Нарушит ли равновесие сила F_3?

5. Бруски пытаются сдвинуть с места рычагом. Какой из брусков сдвинется, если их массы одинаковы?

Вопросы и задачи

7. Мальчик подтягивается вверх, используя неподвижный блок. Выигрывает ли он при этом в силе?



8. Каким должен быть угол в основании клина, чтобы с его помощью можно было опрокинуть груз?

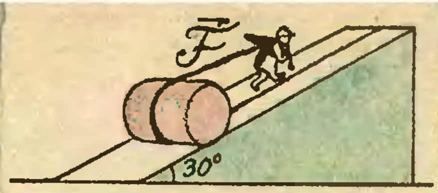
Калейдоскоп „Кванта"

Достаточно присмотреться ко многим окружающим нас инструментам и приспособлениям — плоскогубцам и щипцам для орехов, тачке и вороту, кусачкам и обыкновенному винтику,— как обнаруживается, что в основе их устройства лежат всего два типа так называемых простых машин: рычаг и наклонная плоскость. Их разновидности и комбинации известны с древних времен — еще Архимед применял системы рычагов и блоков для подъема больших тяжестей и строил военные метательные машины. С тех пор, конечно, простые машины претерпели существенные изменения, но не потеряли своего значения и по сегодняшний день в технике, строительстве и военном деле. Мы надеемся, что на примерах предлагаемых задач вы сможете углубить свои знания в одном из важнейших разделов механики — статике, в частности вспомнить знаменитое «золотое правило механики».

3. Как надо соединить подвижные и неподвижные невесомые блоки, используя минимальное их число, чтобы получить выигрыш в силе в 3 раза?

Любопытно, что...

...способ крепления мускулов в теле человека и животных обеспечивает конечностям быстроту движений, более важную, чем сила. В этом проявляется «золотое правило механики»: что теряется в силе, выигрывается в расстоянии. Правило легко можно проследить, наблюдая за рычагом, образуемым согнутой в локте рукой при подъеме, например, гири.



6. По наклонной плоскости при помощи веревки поднимают бочку. Какой выигрыш в силе получают при таком подъеме?

Любопытно, что...

...погибший от руки римского солдата при взятии Сиракуз, Архимед вошел в историю как один из первых ученых, работавших на войну, и как первая жертва войны среди людей науки.

9. При выполнении какого условия винт может служить для крепления деталей?

10. Два мальчика стоят на противоположных сторонах канавы с водой. У каждого из них — доска, длина которой немного меньше ширины канавы. Как им с помощью досок перебраться через канаву?

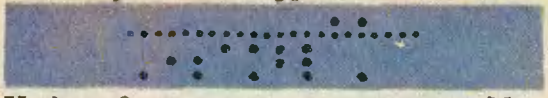
Микроопыт

Полоску из жести уравновесьте на острие карандаша. Проверьте, нарушится ли равновесие, если согнуть один из концов полоски?

Что читать в «Кванте» о простых машинах

1. «Метод виртуальных перемещений» — 1980, № 9;
2. «О простых машинах» — 1985, № 4, с. 17.

зуются двоичной системой счисления. На перфоленте, используемой в ЭВМ для хранения и передачи информации, первые 9 цифр выглядят так:



Цифре 0 соответствует пробел. Маленькие пробитые точки посредине перфоленты служат для ее перемещения и фиксации.

Тем, кто не знаком с двоичной системой счисления, сообщим, что она, как и десятичная система, является позиционной системой: значение величины числа зависит от входящих в число цифр и от их мест в написании числа. И если в десятичной системе 10 единиц предыдущего разряда составляют единицу следующего разряда, то в двоичной системе единицу следующего разряда составляют две единицы предыдущего. Поэтому для записи чисел в двоичной системе достаточно всего двух цифр — 0 и 1:

$$1=1_2,\ 2=10_2,\ 3=11_2,\ 4=100_2,\ 5=101_2,\ 6=110_2,\ \ldots$$

(маленькая цифра 2 справа числа означает, что запись произведена в двоичной системе счисления).

Сравнив эти записи с перфолентой на рисунке, вы увидите, что пробой на перфоленте соответствует цифре 1 а его отсутствие — цифре 0.

Машина читает запись на перфоленте с помощью фотоэлементов: они отмечают пробитые отверстия с помощью света, проникающего через отверстия (в непробитых участках лента загораживает фотоэлемент от источника света).

Похожий принцип заложен и в основу так называемого *полосного кода.*

Многие из вас, вероятно, обращали внимание на полосатый прямоугольник, встречающийся на ярлыках разнообразных импортных товаров (рис. 1):

Рис. 1.

Что означают эти полоски? Оказывается, с их помощью записывают расположенное внизу число — *код товара*. Компьютер, находящийся в кассовом аппарате, с помощью фотоэлементов считывает код (для этого либо проводят табличку с кодом в специальном месте кассового аппарата, либо по коду проводят «считывающим карандашом», соединенным с кассовым аппаратом). Таким образом компьютер получает информацию о продаваемом товаре. В соответствии с ней он выдает из своей памяти цену товара, а сам запоминает, что экземпляр данного товара куплен. В результате в каждый момент известно, сколько экземпляров какого товара куплено и на какую сумму, какой товар нужно еще доставить в торговый зал.

Но как устроен полосный код?

С помощью полосок можно записывать число так, как на перфоленте: тонкая черная полоска — это 1, а тонкая белая полоска — это 0 (рис. 2). Но представлять число можно по-разному. Можно просто записать его в двоичной системе счисления (например, число 5 762 752 950 запишется в двоичной системе так: $101\,010\,111\,011\,111\,001\,010\,000\,110\,110\,110_2$). А можно каждую цифру числа записать в двоичной системе — тогда на одну цифру будет достаточно четырех полосок, а затем представить число набором получившихся полосок.

Рис. 2.

В примере, приведенном на рисунке 1, каждая цифра записана также отдельно, но не в двоичной системе, а по-другому. Каждой цифре соответствует семь значков 0 и 1. Код состоит из двух частей — левой и правой, цифры в левой и в правой частях записываются в соответствии с таблицей (см. с. 43).

Посмотрим сначала на левую часть таблицы. Видно, что запись каждого числа начинается с 0 и заканчивается 1; эти знаки не характеризуют числа, а служат для отделения

Левая часть кода		Правая часть кода	
0	0001101	0	1110010
1	0011001	1	1100110
2	0010011	2	1101100
3	0111101	3	1000010
4	0100011	4	1011100
5	0110001	5	1001110
6	0101111	6	1010000
7	0111011	7	1000100
8	0110111	8	1001000
9	0001011	9	1110100

одного числа от другого. На само число приходится 5 знаков, и они выбраны так, чтобы любые два числа различались не менее, чем в двух местах. Легко видеть, что запись чисел в правой части таблицы «симметрична» записи слева, а именно, вместо цифры 0 на соответствующем месте стоит цифра 1, а вместо 1 стоит 0.

На рисунке 1 каждой цифре соответствует описанная комбинация из семи полосок, расположенная над ней. Все, что мы говорили, относится к «коротким» полоскам. Первые три «длинные» полоски, средние и последние полоски (им соответствуют наборы 101) являются указателями *начала*, *середины* и *конца* шифра. Длинные полоски, следующие за тремя первыми, соответствуют цифре, расположенной сбоку слева (цифре 0 на рисунке 1). Аналогично, длинные полоски перед последними тремя полосками соответствуют цифре, расположенной сбоку справа (цифре 6 на рисунке 1).

Эти «боковые» числа служат для защиты считывания от ошибок. Их значения подобраны так, чтобы утроенная сумма чисел, стоящих на четных местах, сложенная вместе с суммой чисел, стоящих на нечетных местах, делилась на 10. Суммирование производится слева направо; считается, что цифра, стоящая сбоку слева, находится на нулевом (значит, четном) месте. В нашем случае (см. рис. 1)

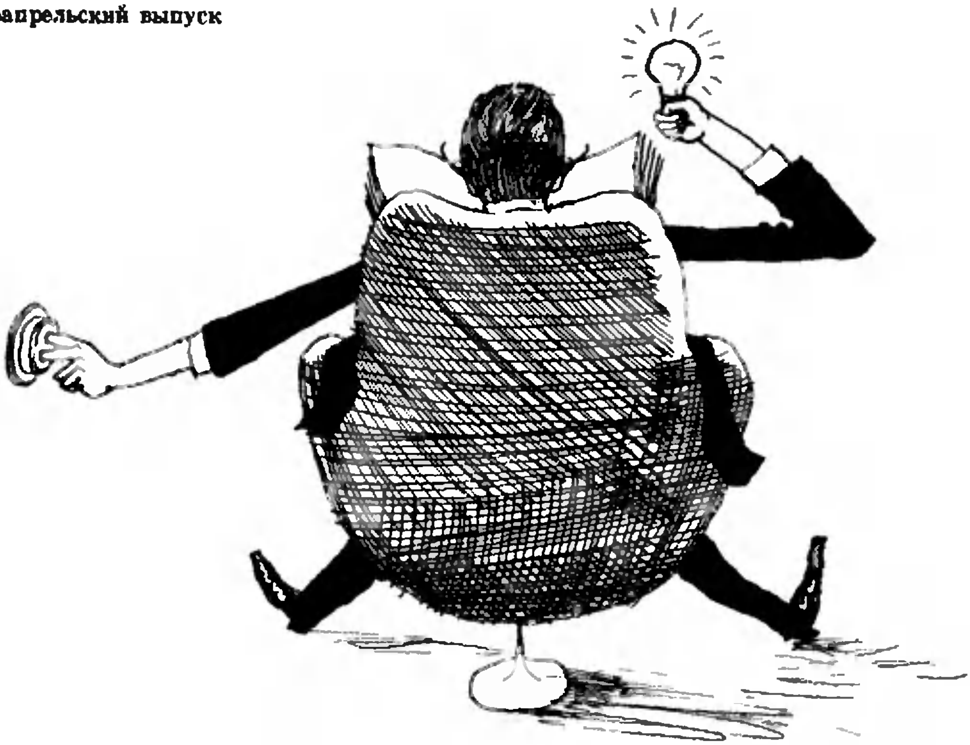
$$3\cdot(0+7+2+5+9+0)+\\+(5+6+7+2+5+6)=100.$$

Если компьютер неправильно прочтет одну из цифр, он сразу обнаружит ошибку. Компьютер не сможет обнаружить ошибку лишь в том случае, если он прочтет по крайней мере две цифры ошибочно, причем так, чтобы ошибки «скомпенсировались» и полученная сумма снова делилась на 10. Но вероятность этого чрезвычайно мала.

Такая защищенность от ошибок очень важна, иначе за батон хлеба компьютер мог бы потребовать от покупателя стоимость, скажем, коробки шоколадных конфет.

Защита от ошибок заложена и в стандартной форме написания почтового индекса. Об этом вы можете прочесть в статье десятиклассника Я. Карпова «Оптимальная кодировка почтового индекса» («Квант», № 11, 1987).

В заключение заметим, что в последнее время многие люди пишут ноль вот так: ∅. Это — профессионалы-программисты. Дело в том, что в программе для ЭВМ буквы и цифры могут довольно произвольно перемежаться. Чтобы отличить нуль от буквы О, и введена запись ∅. Этим сняты возможные ошибки при использовании латинского шрифта. А при использовании русского шрифта возникает возможность спутать букву З с цифрой 3, а букву Ч с цифрой 4. Может быть, и эти цифры «изменятся»?



Лаборатория „Кванта"

«Физика для дураков»

В. Ф. ЯКОВЛЕВ

Ученье в институте давалось мне тяжело. Может быть, именно поэтому меня особенно возмущали часто встречающиеся в курсах физики и математики ремарки типа «как известно...», «отсюда без труда получаем...», «легко видеть...» Откуда известно? Почему легко? Напротив, очень тяжело, а иногда и просто невозможно! Такие ремарки не только дезинформируют студентов и учащихся, но способствуют появлению у них комплекса неполноценности.

А может, они прикрывают некомпетентность авторов учебников? В самом деле,— способный студент разберется даже в изобилующем ошибками тексте. Уверен, что, если бы мне предложили написать, например, курс анализа бесконечно малых, отняв от меня лекционные конспекты и учебники, я бы сделал это так, что Евклид и Архимед отлично бы во всем разобрались. Отсюда следует, что учебники для умных людей писать просто, эта задача по плечу и дуракам. А написать учебник для людей с умеренными способностями — вот это непросто. Но зато — какая благородная задача!

Представьте себе: «Квантовая механика для умственно отсталых», «Высшая математика для круглых дураков» — да этим книгам цены бы не было! И надо обязательно разбросать по тексту этих книг такие ремарки: «отсюда с трудом получаем...», «нелегко видеть, что...» и т. д. У читателей, преодолевших соответствующие нехитрые премудрости, просто крылья бы вырастали.

После сказанного легко представить, какова была моя радость, когда, читая книгу известного физика Г. А. Гамова «Материя, земля, небо» (изданную в США в 1959 году), я обнаружил в ней ссылку на другую книгу, вышедшую в 1908 году в Петербурге и называвшуюся, судя по Гамову, «Physics for Fools». Это название по-русски звучит так: «Физика для дураков». Я чуть не закричал на весь читальный зал библиотеки: «Эврика!» Но радость моя была преждевременной, поскольку фамилии автора Гамов не указал.

После изнурительных поисков в различных каталогах и библиографических справочниках я обнаружил заветную книгу. На ее титульном листе значилось:

Издание Общества
для Поощрения Глупости

*

Новая физика без приборов

*

Полное описание
общедоступных опытов,
легко выполнимых домашними
и др. средствами

*

Лучший досуг для тоскующих
по физике и астрономии

*

По многочисленным
новейшим источникам
и открытиям составил

*

СЕРГЕЙ
ОЛИМПОВ

На хранящемся в Государственной публичной библиотеке им. М. Е. Салтыкова-Щедрина экземпляре имеется дарственная надпись: «Глубокоуважаемому Василию Евгеньевичу Мурашинскому на добрую память от автора. С.·М.»

Хотя книга Олимпова была не совсем такой, о какой я грезил в студенческие годы, знакомство с ней не вызвало разочарования. По стилю она близка к опубликованному у нас в свое время сборнику переводов «Физики шутят» (М., Мир, 1966). Во втором издании (1968 г.) этого сборника анекдотов и веселых историй в дополнение к шуткам физиков зарубежных прибавлены шутки наших земляков. Мне кажется, что выдержки из книги Сергея Олимпова могли бы украсить такого рода издание.

Несколько слов о личности автора книги. Мои попытки ее установить долгое время не приводили к успеху: такой фамилии я не находил ни в физических журналах тех лет, ни в адресных книгах «Весь Петербург» или «Вся Москва», ни в многотомном словаре псевдонимов.

Но однажды, когда я в очередной раз прочитал приведенную дарственную надпись, я посмотрел на подпись «С. М.» свежим взором. Почему «М»? И тут меня осенило. Как чаще всего выбирают себе псевдоним? Сохраняют свое имя, а отчество превращают в фамилию. Если это так, то автора звали Сергеем Олимпиевичем, а фамилия его, вероятно, начиналась на букву «М». Это была вполне хорошая зацепка, и теперь можно было попробовать начать розыск — например, в ежегодно публиковавшихся списках членов Русского физико-химического общества, протоколы заседаний которого помещал на своих страницах журнал этого общества.

Взяв несколько томов журнала, по времени недалеко отстоявших от известной мне «метки» — 1908 год, я быстро справился с задачей и нашел Сергея Олимпиевича Максимовича. После этого, вновь обратившись к упомянутым выше справочникам, ежегодникам «Весь Ленинград» и изданной в 1934 году Академией наук СССР книге «Научные работники Ленинграда», я без труда обнаружил, что родился Сергей Олимпиевич 5 августа 1876 года в Петербурге, в 30-х годах жил в Ленинграде (на проспекте Огородникова) и работал в Государственном институте геодезии и картографии, занимаясь прикладными вопросами аэрофотосъемки и физикой явлений фотографического изображения, а также измерением различных характеристик фотоматериалов (есть такая область физики: сенситометрия, или фотографическая метрология). С. О. Максимович преподавал в Фотокинотехникуме, сотрудничал в Государственном оптическом институте и в Ленинградском физико-техническом институте (в последнем в 20-х годах интенсивно исследовались явления рассеяния и диффракции рентгеновских лучей, и в одном из отчетов по этой работе указывалось, что ее исполнители «непрерывно пользовались советами и ценными указаниями С. О. Максимовича»).

Сергей Олимпиевич был, помимо этого, очень остроумным человеком и прекрасно рисовал. В этом можно убедиться, посмотрев на публикуемые здесь его рисунки и подписи к ним.

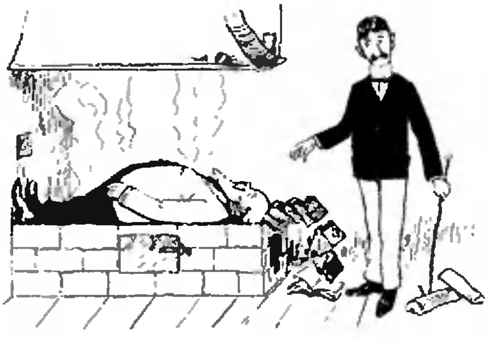


Рис. 1. Теплотное удлинение.

Все тела удлиняются от теплоты, поэтому, например, рельсы всегда делают короче, чем следует. Этот опыт может повторить каждый у себя дома.

Положите престарелого и незлобивого родственника на холодную плиту так, чтобы он упирался ногами в стену, а головой в стопку книг на краю плиты. Разведите огонь, и вы увидите, как по мере нагревания родственник будет удлиняться и передвигать книги, пока они не упадут. Несмотря на очевидность явления, станем его продолжать. С повышением температуры явление изменится: родственник станет деформироваться и наконец вскочит и убежит. Таким образом все будут наглядно убеждены в законе, который ученые называют превращением теплоты в движение.

Если положить родственника сразу на раскаленную плиту, он может перейти в сфероидальное состояние, и опыт не удастся.

Рис. 2. Простая электрическая машина.

Опыты с большими электрическими машинами недешевы да и небезопасны. Между тем, каждый может построить себе такую машину при помощи простых домашних средств.

Посадите вашего знакомого на четвертную бутыль и дайте ему в руки вилку. Между тем, посильнее натрите резиновую галошу о лисью шубу и поднесите ее к вилке. В скором времени послышится характерное шипение, и из носа знакомого можно будет извлекать длинные яркие искры, особенно заметные в темноте. При помощи этого несложного прибора можно произвести все опыты, описанные в учебниках физики: зарядить лейденскую банку, зажечь маленькую лампочку накаливания и даже привести в движение швейную машину или велосипед.

От времени до времени полезно смазывать знакомого и бутыль, на которой он сидит, теплым вазелином.

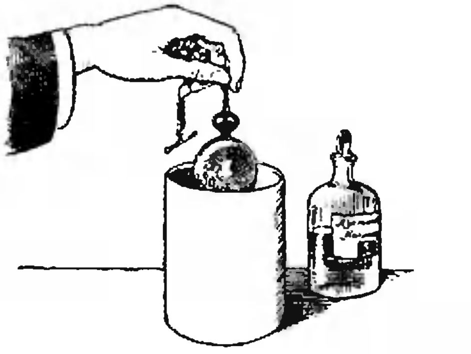


Рис. 3. Электролиз.

Кажется, что может быть прочнее золотых часов! Никогда не тускнеющий блеск металла, движение стрелок, как бы указывающих время,— все говорит нам о постоянстве, о вечности. На самом деле это не так. Возьмите массивные золотые часы с анкерным ходом и осторожно опустите их вечером в смесь азотной и соляной кислот, налитых в объемистую фарфоровую банку. На другой день часы как бы исчезнут: останутся только стеклышко и циферблат. Их надо вынуть и сполоснуть, высушить и хранить в гигроскопической вате. О часах не беспокойтесь: в природе ничего не теряется! Перелейте зеленоватую жидкость в бутылку с притертой пробкой и храните ее в темноте.

В следующем нашем издании — «Химия без приборов» ⟨так и не осуществленном — В. Я.⟩ — мы дадим точные наставления, как получить часы обратно. Читатель, конечно, *догадался, что для этого мы воспользуемся услугами чародея XX столетия — электричеством. Машина, описанная в опыте 2, окажет нам при этом еще раз значительную, неоценимую услугу.*

(Во время второй мировой войны лауреат Нобелевской премии Фредерик Жолио-Кюри, желая уберечь золотую Нобелевскую медаль, растворил ее примерно описанным способом и бутылку с раствором прятал в течение всех лет оккупации. После освобождения Франции Жолио-Кюри, не без помощи чародея XX века, выделил растворенное золото, переправил его в Швецию и получил новый экземпляр Нобелевской медали.— В. Я.)

Рис. 4. Преломление света.

«Что Вы делаете! — вскрикивает в ужасе хозяйка дома, видя, как вы быстро направляетесь к зеркалу с поднятой палкой.— Вы разобьете зеркало!»

Ничуть не бывало. Из законов оптики вы знаете, что угол падения связан с углом преломления определенным условием, и потому достаточно сильно хватить по зеркалу концом палки так, чтобы соблюсти это условие, и палка переломится, но зеркало даже не затрещит — к немалому удивлению присутствующих.

Обыкновенное стекло, не зеркало, при таких условиях, конечно, разбилось бы вдребезги.

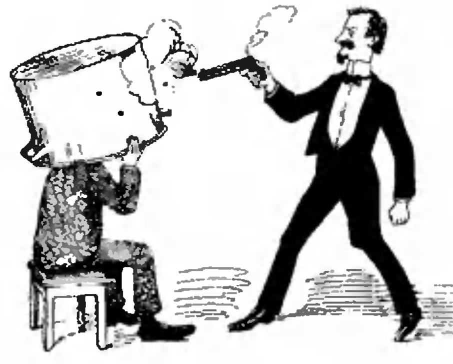


Рис. 5. Распространение звука.

Как известно, звук распространяется по поверхности металлических тел. На этом основан интересный опыт, изображенный здесь. На голову желающего надевают тонкостенный жестяной котел и стреляют в него в упор из пистолета, пулемета или мортиры. Лицу под котлом оглушительный выстрел покажется не громче щелчка.

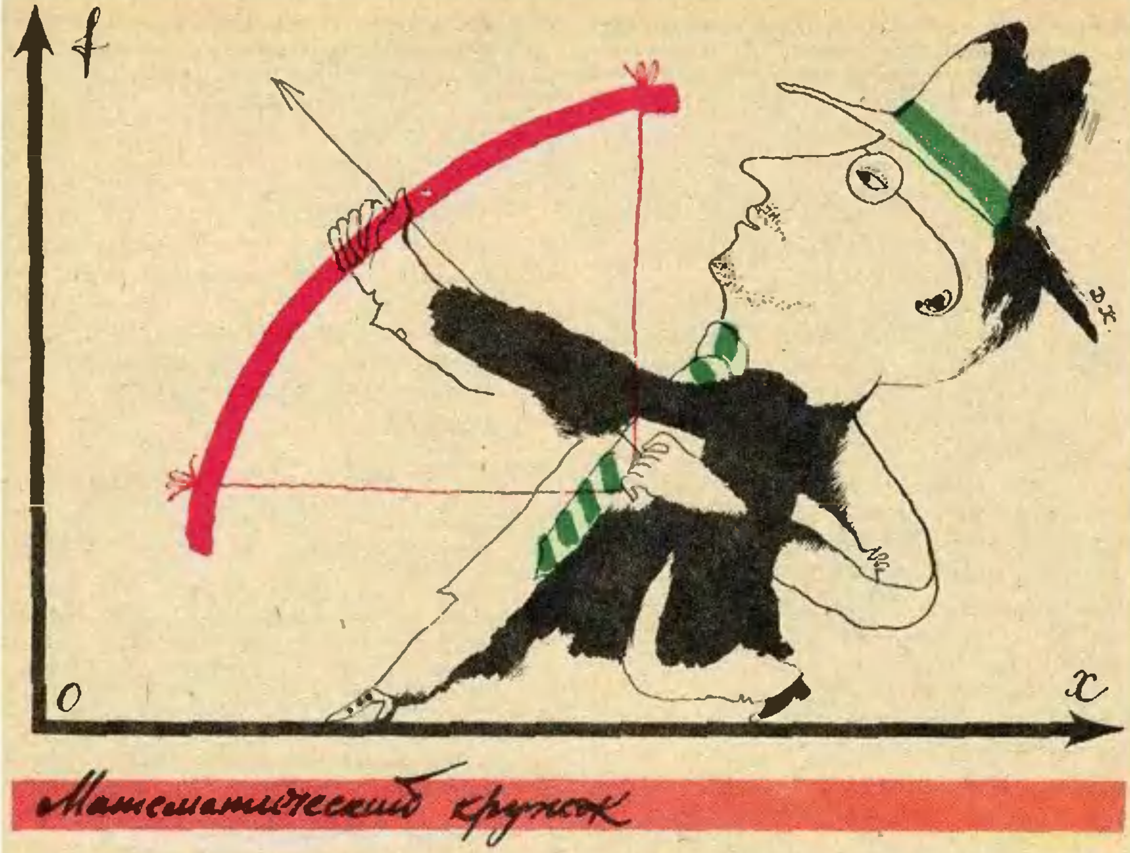
Рис. 6. Человек на яйцах. (К физиологии птиц)

Этот опыт производит большую сенсацию, особенно в кругу хозяек дома. «Кто из вас может вывести цыплят в течение четверти часа?»

Окинув торжествующим взором безмолвное собрание, вы удаляетесь и, отыскав на дворе наседку, отбираете из-под нее два десятка хорошо насиженных яиц. Вернувшись в залу, вы кладете их на табурет, но предварительно ставите под него, незаметно для публики, зажженную керосиновую лампу и скрываете ее под полами сюртука. Скрытая теплота керосина разовьет необыкновенно скоро цыплят, которые и огласят комнату веселым чириканием. Надо только стараться не раздавить яиц.

Рис. 7. Интерференция и диффракция.

Прикрепите к стене, по возможности мраморной, лист белой бумаги и осветите его свечкой. Теперь зажгите другую, разумеется, при строго определенной разности расстояний. Можно было бы ожидать, что свету прибавится, но окажется, что лист бумаги потемнеет. Это и есть интерференция, которую великий Ньютон назвал золотым ключом Провидения.



Основной принцип дифференциального исчисления

Часть II: Свойства производной

Член корреспондент АН СССР
Д. К. ФАДДЕЕВ.
кандидат физико-математических наук
М. С. НИКУЛИН,
И. Ф. СОКОЛОВСКИЙ

В нашей предыдущей статье (см. «Квант» № 3) мы рассказали об *основном принципе дифференциального исчисления.* (Коротко он состоит в том, что график хорошей функции на достаточно малом промежутке почти не отличается от графика линейной функции.) Затем мы подробно изучили свойства линейной функции. В частности, мы определили *мгновенную скорость* изменения линейной функции как $k=\Delta y/\Delta x$, т. е. приняли ее равной средней скорости на любом промежутке.

В общем же случае (т. е. для произвольной функции) такое определение непригодно: средняя скорость для разных промежутков может быть не одинаковой. В общей ситуации мы сталкиваемся с противоречием, суть которого в том, что мы пытаемся говорить о «мгновенном значении» величины, которая по своему физическому смыслу может рассматриваться только как функция от промежутка. Корректное определение понятий вроде мгновенной скорости изменения существенно использует формальный математический аппарат предельного перехода.

Заметим, однако, что обоснование элементов анализа на основе теории пределов было осуществлено О. Коши только в начале XIX столетия, т. е. спустя более двух тысяч лет после появления некоторых идей, лежащих в основе дифференциального исчисления, и через 200 лет после его создания Ньютоном и Лейбницем. Математический анализ, включающий в себя дифференциальное и интегральное исчисления, был ведущей и высоко развитой ветвью математики к тому моменту, когда было дано его обоснование.

Применение «основного принципа» и привлечение линейной функции поможет нам дать наглядное, интуитивно ясное определение понятия «мгновенной скорости» в общем случае, минуя теорию пределов.

Здесь мы и подошли к вопросу о том, почему *линейная функция* занимает особое место в математике.

Дело в том, во-первых, что все, что касается линейной функции, как в аспекте проблем исследования функций, так и в плане геометрического и физического истолкования результатов, очень просто и наглядно. Именно эти простота и наглядность отвели линейной функции особую роль в математике при изучении свойств тех функций, которые наиболее часто встречаются в приложениях.

Второе и самое существенное обстоятельство было отмечено в первой части статьи: ко всем элементарным функциям и к большинству функций, к которым мы приходим при изучении зависимостей между реальными величинами, применим *«основной принцип»* дифференциального исчисления.

Иначе говоря, при решении определенного круга задач каждую из этих функций вблизи фиксированной точки можно заменить линейной, график которой есть касательная к графику рассматриваемой функции в выбранной точке. Поскольку важнейшие свойства линейной функции определяются ее угловым коэффициентом, то по угловому коэффициенту касательной, т. е. по значению производной от функции в данной точке, можно судить о поведении самой функции вблизи выбранной точки.

Мы не будем здесь останавливаться на технике вычисления производной (считая, что читатель в какой-то мере ей владеет). Заметим лишь, что (как показано в статье «О касательной к графику функции», см. «Квант», 1986, № 3) для некоторых функций значение производной можно получить, исходя из по существу элементарных соображений.

Геометрическое и физическое истолкование производной $f'(x_0)$ от функции $f(x)$ в данной точке x_0

В соответствии с «основным принципом» считаем функцию $f(x)$ *вблизи* точки x_0 линейной, а малый кусочек ее графика совпадающим с отрезком касательной в точке x_0. Тогда $f'(x_0)$ показывает, насколько круто наклонен (и в какую сторону) маленький кусочек графика функции $f(x)$, содержащий точку $f(x_0)$. В этом состоит *геометрический смысл производной*.

Например, по таблице

x	1	2	3	4
$f(x)$	0,5	2	3	1,5
$f'(x)$	1	2	0	−2

мы можем построить не только сами точки графика, но и маленькие кусочки графика, содержащие табличные точки (рис. 1).

Мы знаем, что в тех случаях, когда прямая есть график зависимости между двумя физическими величинами, угловой коэффициент прямой имеет ясный физический смысл. Этот же физический смысл имеет и производная от функции (*не линейной*), *если эта функция описывает зависимость между теми же величинами*. Но только численное значение $f'(x_0)$ производной от функции $f(x)$ в точке x_0 уже нельзя отнести ко всей функции в целом, а *лишь к малой окрестности точки* x_0. Например, если функция $T=f(t)$ описывает зависимость между температурой тела и временем его нагрева (рис. 2), то $f'(t_0)$ есть скорость изменения температуры (скорость нагрева) на малом интервале времени, содержащем точку t_0. Последнее утвержде-

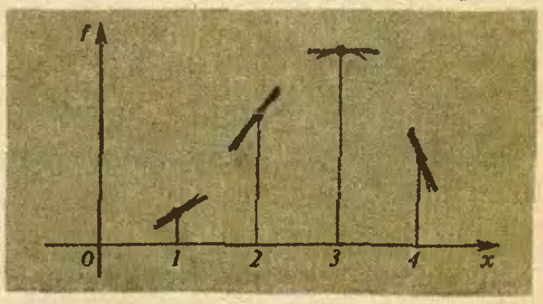


Рис. 1.

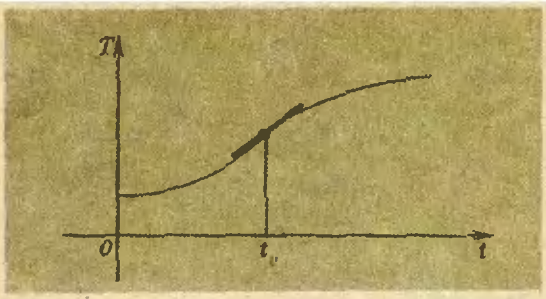


Рис. 2.

ние тем более точное, чем меньше интервал, содержащий точку t_0. Поэтому $f'(t_0)$ называют скоростью нагрева в момент времени t_0. Отвлекаясь от конкретного физического содержания, мы говорим, что $f'(x_0)$ есть *скорость изменения функции* $f(x)$ в точке x_0.

Приближенные вычисления

Теорема. *Абсолютная погрешность в вычислении значения функции примерно равна абсолютной погрешности измерения аргумента, умноженной на модуль значения производной в соответствующей точке.*

Доказательство. Действительно, пусть x_0 — приближенное значение аргумента и x — неизвестное точное значение аргумента, заведомо близкое к x_0. Величину $\Delta x = x - x_0$ абсолютной погрешности примем за малое приращение аргумента. Считая (в соответствии с «основным принципом») функцию $y(x)$ вблизи точки x_0 линейной с угловым коэффициентом $y'(x_0)$, получим в силу характеристического свойства линейной функции (доказанного в первой части статьи) $\Delta y = y'(x_0)\cdot \Delta x$, что и требовалось доказать.

Следует понимать, что высказанное утверждение справедливо в предположении, что абсолютная погрешность аргумента действительно достаточно мала для данной функции.

Если известно значение функции $f(x)$ в точке x_0 и требуется вычислить значение $f(x)$ вблизи точки x_0, то, исходя из «основного принципа», можно заменить трудоемкие вычисления функции приближенными вычислениями по уравнению касательной в точке x_0. Именно,

$$\boxed{f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).}$$

Приближенное приращение функции, вычисленное «по касательной», т. е.

$$f'(x_0)(x - x_0),$$

называется *дифференциалом функции* и обозначается символом df. Приращение аргумента $x - x_0$ называют *дифференциалом независимой переменной* и обозначают dx. Таким образом,

$$\boxed{df = f'(x_0)\,dx.}$$

В терминах дифференциалов «основной принцип» следует понимать так, что истинное приращение «хорошей» функции на малом интервале отличается от приращения, вычисленного «по касательной», на величину, пренебрежимо малую по сравнению с df. Здесь необходимо отметить одно важное свойство дифференциала: *разность $\Delta f - df$ между истинным приращением функции и ее дифференциалом не просто намного меньше, чем df, — при уменьшении dx эта разность убывает существенно быстрее, чем dx.* Точный смысл термина «существенно быстрее» и соответствующее доказательство возможны только после надлежащего более строгого описания исходных понятий анализа.

Мы ограничимся разъяснением смысла терминов «одинаково быстро» и «существенно быстрее» на конкретных примерах. Величины, связанные прямой пропорциональной зависимостью, изменяются одинаково быстро, именно, изменение одной в n раз приводит к изменению другой тоже в n раз. Величины, связанные, например, квадратичной зависимостью, изменяются с разными скоростями. Действительно, если $y = x^2$, то при уменьшении $|x|$ в 10 раз y уменьшается в 100 раз, при уменьшении $|x|$ в 100 раз y уменьшается в 10000 раз и т. д. Вообще, если $y = x^a$, где $a > 1$, то при стремлении $|x|$ к нулю y убывает существенно быстрее, чем $|x|$. Это подтверждается тем, что отношение $y/x = x^{a-1}$ приближается к нулю при стремлении x к нулю. То же можно сказать о разности $\Delta f - df$ — отношение $(\Delta f - df)/dx$ стремится к нулю при стремлении dx к нулю.

Два свойства дифференциала — 1) дифференциал функции пропорцио-

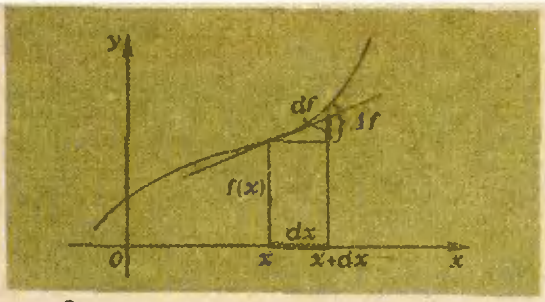


Рис. 3.

нален дифференциалу аргумента и 2) разность между истинным приращением функции и ее дифференциалом убывает существенно быстрее, чем дифференциал аргумента,— вполне характеризуют дифференциал функции и определяют его наиболее элементарные, но важнейшие приложения в физике, технике и т. д. Дело в том, что дифференциал (в отличие от производной) часто бывает виден «на глаз» и может быть найден проще, чем *производная. После* этого производная может быть вычислена как отношение дифференциалов: $df = f'(x_0)dx$,

$$f'(x_0) = \frac{df}{dx}.$$

Пример 1. *Вычислить* $f'(0) = f'(x)|_{x=0}$, *если* $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4x$.

Решение. Вблизи $x=0$ дифференциал аргумента равен самому аргументу ($dx = x$), а приращение функции — значению функции. Часть приращения функции, пропорциональная dx, есть слагаемое $4x$, а остальные слагаемые, содержащие x, убывают вблизи нуля существенно быстрее, чем x. Так что в точке $x=0$ имеем $df = 4dx$, а значит, $f'(x) = 4$.

Оба свойства дифференциала хорошо иллюстрируются графически (рис. 3). На этом рисунке значение dx выбрано довольно большим, однако «на глаз» видно, что при уменьшении dx разность $\Delta f - df$ убывает существенно быстрее, чем Δx.

Дифференцирование сложной функции

Исходя из «основного принципа» легко получить выражение для производной и дифференциала сложной функции.

Пусть $F(x) = f(g(x))$. Считаем функцию $g(x)$ линейной «в малом» вблизи *точки* x, *а функцию* $f(t)$ — линейной вблизи точки $t = g(x)$. Тогда в силу теоремы о композиции линейных функций, доказанной в первой части нашей статьи, $F(x)$ — линейная вблизи x и ее угловой коэффициент равен произведению угловых коэффициентов функций g и f, т. е.

$$F'(x) = k_1 \cdot k_2, \text{ где } k_1 = f'(t)|_{t=g(x)} \text{ и } k_2 = g'(x).$$

Для дифференциала сложной функции получаем выражение

$$dF(x) = k_1 \cdot k_2 \cdot dx = f'(t)|_{t=g(x)} \cdot g'(x)dx.$$

Поскольку $g'(x)dx = dg(x)$, получаем

$$\boxed{dF(x) = f'(t)|_{t=g(x)} \cdot dg(x).}$$

Это важное равенство говорит, что *форма записи дифференциала* не зависит от того, что находится под знаком функции — независимая переменная или функция от другой переменной. Это свойство дифференциала называют *инвариантностью*. Свойство инвариантности дифференциала помогает легче освоить технику дифференцирования сложных функций.

Пример 2. *Найти производную от* $F(x) = \sqrt{\sin(3x-1)}$, *зная, что* $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, $(\sin x)' = \cos x$ *и* $(3x-1)' = 3$.

Решение:

$$dF(x) = (\sqrt{t})'|_{t=\sin(3x-1)} \cdot d\sin(3x-1) = \frac{1}{2\sqrt{\sin(3x-1)}}(\sin t)'|_{t=3x-1} d(3x-1) =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{\sin(3x-1)}} \cos(3x-1) 3dx = \frac{3\cos(3x-1)}{2\sqrt{\sin(3x-1)}} dx.$$

Раскрытие неопределенности типа 0/0

Часто приходится изучать поведение дроби вблизи точки, в которой числитель и знаменатель обращаются в нуль. Непосредственные вычисления с помощью даже высокоточных ЭВМ могут дать в этих случаях грубую ошибку из-за уничтожения значащих

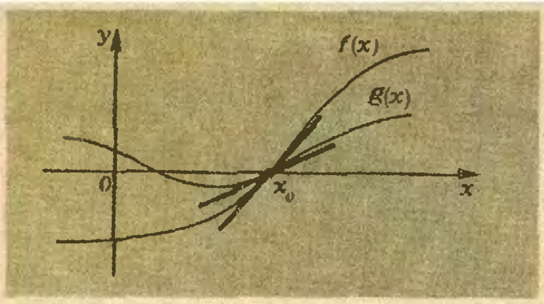


Рис. 4.

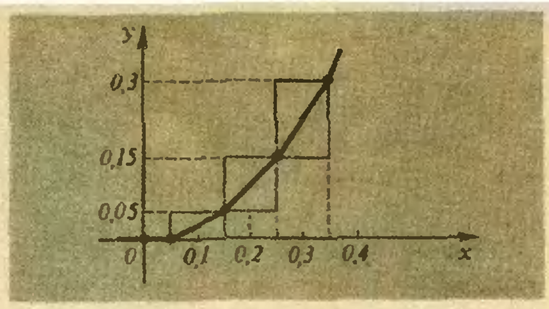


Рис. 5

$f(x)/g(x)$ при значениях x, приближающихся к x_0, если в этой точке числитель и знаменатель обращаются в нуль. Считаем $f(x)$ и $g(x)$ линейными вблизи точки x_0, малые кусочки их графиков заменяем касательными к графикам этих функций в точке x_0. Таким образом, считаем, что
$f(x)=f'(x_0)(x-x_0)$, $g(x)=g'(x_0)(x-x_0)$.
Тогда, если $g'(x_0)\neq 0$, то

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f'(x_0)(x-x_0)}{g'(x_0)(x-x_0)}=\frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}.$$

Надо помнить, что фактически это равенство приближенное, но тем более точное, чем ближе x к x_0. Мы получили правило, известное в математике как *правило Лопиталя для раскрытия неопределенности типа* $0/0$.

На языке пределов это правило читается так: предел отношения $\frac{f(x)}{g(x)}$ при $x\to x_0$, если $f(x_0)=0$ и $g(x_0)=0$, равен отношению производных $f'(x_0)$ и $g'(x_0)$:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}\qquad (g'(x_0)\neq 0).$$

Пример 3. *Составить таблицу значений функции*

$$f(x)=\frac{2x^2-x-\sin\pi x/2}{\sqrt{x}-\cos(1-x)}$$

вблизи точки $x=1$.

Решение. Результаты вычислений на МК В3-34 показаны в таблице 1. Применим правило Лопиталя

$$\left(2x^2-x-\sin\frac{\pi}{2}x\right)'\Big|_{x=1}=$$

$$=\left(4x-1-\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{2}x\right)\Big|_{x=1}=4-1=3,$$

$$(\sqrt{x}-\cos(1-x))'\big|_{x=1}=$$

$$=\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}-\sin(1-x)\right)\Big|_{x=1}=\frac{1}{2}.$$

Следовательно, при стремлении x к 1 значения $f(x)$ приближаются к числу $3:(1/2)=6$. Из таблицы видно, что ошибки в вычислениях начинаются довольно далеко от предела точности МК — уже при $x=1{,}0001$.

Признак возрастания (убывания) функции на интервале

Теорема. *Если в каждой точке интервала угловой коэффициент (производная) к графику функции в этой точке больше нуля, то функция возрастает на этом интервале, а если меньше нуля — то убывает.*

Действительно, пусть угловой коэффициент касательной к графику функции больше нуля. Тогда касательная в любой точке графика является поднимающейся прямой и, следовательно, любой достаточно малый участок графика есть поднимающаяся линия. Интуитивно ясно, что график в целом есть поднимающаяся линия и, следовательно, функция возрастает. Аналогично, отрицательность производной во всех точках интервала влечет убывание функции на этом интервале.

Численное решение дифференциальных уравнений

Во многих случаях удается получить зависимость между величинами, содержащую их производные, т. е. в виде *дифференциального уравнения*. Далеко не всегда уравнение удается разрешить, т. е. найти функции, являющиеся решением данного дифферен-

Таблица 1

x	1,1	1,01	1,001	1,0001	1,00001	1,000001
$f(x)$	6,1762693	6,0196529	6,0039984	6,012024	6,1224489	7,5

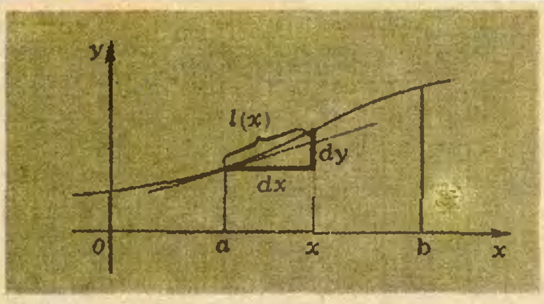


Рис. 6.

циального уравнения. Однако исходя из «основного принципа», можно получить приближенное (численное) решение дифференциального уравнения.

Пример 4. *Восстановить на интервале* [0; 1] *функцию по дифференциальному уравнению:* $y'(t)=5t$ *и начальному условию* $y(0)=0$.

Решение. Составим таблицу значений производной:

Таблица 2

t	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
$y'(t)$	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4	4,5	5

Будем считать, что вблизи табличных точек (согласно «основному принципу») график функции тесно прилегает к отрезкам касательных. Разобьем интервал [0; 1] на части [0; 0,05]; [0,05; 0,15]; [0,15; 0,25], и т. д. до [0,95; 1]. Вершины ломаной, заменяющей функцию, расположим в точках деления: 0; 0,05; 0,15; 0,25;... ; 0,95; 1. Взяв угловые коэффициенты звеньев ломаной из таблицы, получим график (рис. 5). На этом рисунке построена только часть графика. Постройте самостоятельно весь график и убедитесь, что он хорошо совпадает с точным решением $y=2{,}5t^2$.

Определение длины участка кривой, являющейся графиком функции $y=f(x)$, на интервале $[a; b]$

На рисунке 6 показан график функции $y=f(x)$. Надо найти длину части графика на интервале $[a; b]$. Рассмотрим функцию $l(x)$, значения которой равны длине участка графика от точки $x=a$ до некоторого x, $x\in[a; b]$. Найдем дифференциал функции $l(x)$ в точке x. Считая функцию $f(x)$ *«в малом» линейной*, получим

$$dl=\sqrt{(dx)^2+(dy)^2}=\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}dx=$$

$$=\sqrt{1+(f'(x))^2}dx,$$

откуда

$$l'(x)=\frac{dl}{dx}=\sqrt{1+(f'(x))^2}.$$

Очевидно, что $l(a)=0$. Мы пришли к известной задаче о восстановлении функции по ее производной (дифференциалу) и начальному условию. *В терминах интегрального исчисления* нам необходимо вычислить

$$\int_a^b\sqrt{1+(f'(x))^2}dx.$$

Заметим, что именно *при решении* задачи на вычисление длины кривой, даже в простых с виду случаях, мы приходим к *неберущимся интегралам*, т. е. к интегралам, не выражающимся через элементарные функции. Например, при вычислении длины части синусоиды, получаем уравнение $l'(x)=\sqrt{1+\cos^2 x}$ или интеграл

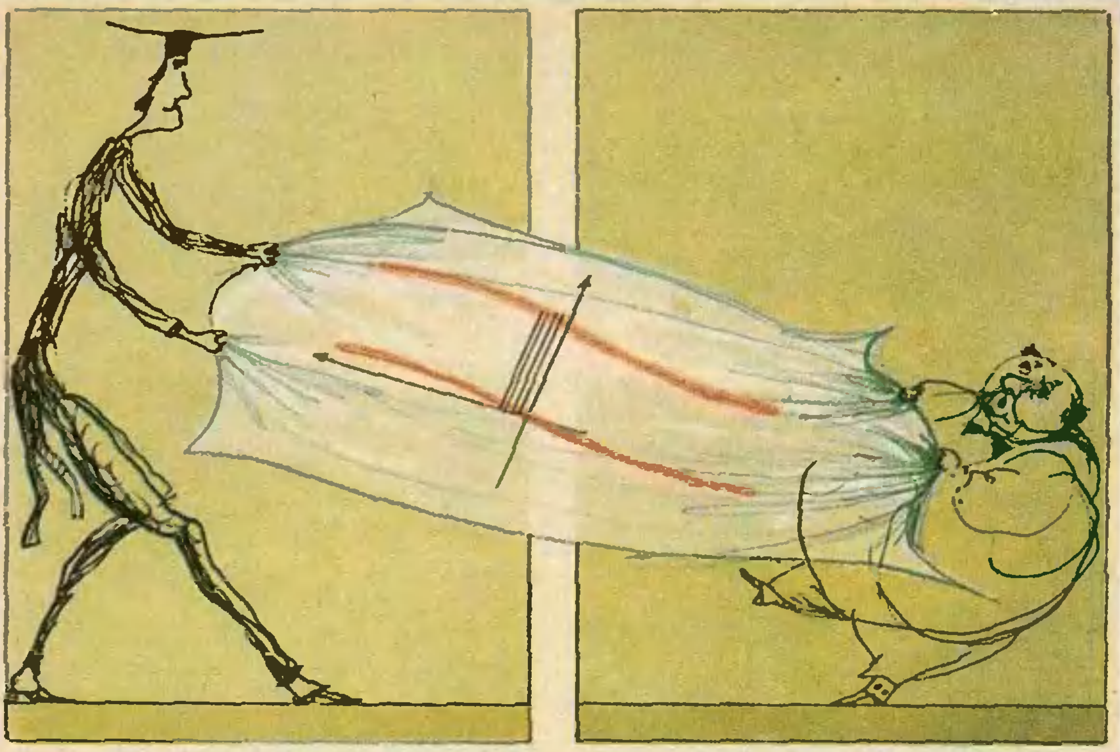
$$\int_a^b\sqrt{1+\cos^2 x}\,dx.$$

Аналогично при вычислении длины участка гиперболы $y=1/x$ получим уравнение $l'(x)=\sqrt{1+1/x^4}$ и интеграл

$$\int_a^b\sqrt{1+\frac{1}{x^4}}\,dx.$$

Упражнение. Постройте численное решение двух последних дифференциальных уравнений методом, описанным в статье. Найдите длину участка синусоиды на интервале $[0; \pi/2]$ и длину участка гиперболы на интервале $[1; 2]$.

В заключение заметим, что описанные идеи более подробно развиты в книге «Элементы высшей математики для школьников» авторов настоящей статьи (М.: «Наука», 1987). В этой же книге дано достаточно строгое обоснование «основного принципа» и более строгие доказательства теорем на основе понятия бесконечно малой величины.



Практикум абитуриента

Неравенства и графики

Кандидат физико-математических наук
В. А. ПЕТРОВ

Практически в каждом вузе на письменном экзамене по математике требуется решить неравенство. Это задание нередко лидирует по количеству неправильных ответов. Ошибки возникают из-за неточного или неполного использования свойств соответствующих функций.

Универсальной «шпаргалкой», по которой можно прочитать все свойства функции, является ее график. Поэтому при решении более или менее сложных неравенств полезно прибегать к последовательному использованию графиков элементарных функций. Такой прием позволяет автоматически, без напряжения памяти, переходить к равносильным неравенствам; при этом сама собой учитывается (ее учесть чаще всего забывают) область допустимых значений. Кроме того, геометрическая иллюстрация, как всегда, способствует более сознательному пониманию существа применяемых преобразований. Рассмотрим конкретные примеры.

Пример 1. *Решить неравенство*

$$2^{\sqrt{\log_{\frac{\sqrt{3}}{3}} \operatorname{tg} x - 1}} < 1. \qquad (1)$$

Решение. Обозначим показатель степени через t. Тогда неравенство (1) принимает вид

$$2^t < 1. \qquad (1')$$

Изобразим график функции $y = 2^t$ (рис. 1). Отметим на оси Oy интересующие нас значения. Они заполняют луч $(-\infty; 1)$. Спроектируем этот луч на график, а выделившуюся после этого часть графика спроектируем на ось Ot. Тем самым мы нашли решения вспомогательного неравенства (1'): $t > 0$. Поэтому неравенство (1) равносильно неравенству

$$\sqrt{\log_{\frac{\sqrt{3}}{3}} \operatorname{tg} x} < 1. \qquad (2)$$

Обозначив теперь через t подкоренное выражение, получим неравенство

$$\sqrt{t}<1, \qquad (2')$$

решения которого находим с помощью графика функции $y=\sqrt{t}$ (рис. 2). Это полуинтервал $0\leqslant t<1$. Поэтому неравенство (2) равносильно двойному неравенству

$$0\leqslant \log_{\frac{\sqrt{3}}{3}} \operatorname{tg} x<1. \qquad (3)$$

Из графиков функций $y=\log_{\frac{\sqrt{3}}{3}} t$ (рис. 3) и $y=\operatorname{tg} x$ (рис. 4) получаем

$$\frac{\sqrt{3}}{3}<\operatorname{tg} x\leqslant 1 \Leftrightarrow k\pi+\frac{\pi}{6}<x\leqslant\frac{\pi}{4}+k\pi$$

$$(k=0, \pm 1, \ldots).$$

П р и м е р 2. *Решить неравенство*

$$3x+2+\sqrt{5x+4}<0.$$

Р е ш е н и е. Пусть $5x+4=t$. Тогда

$$3x+2=\frac{3t-2}{5}, \text{ т. е. } \sqrt{t}<\frac{2-3t}{5}.$$

Изобразим на одном чертеже графики функций $y=\sqrt{t}$ и $y=\frac{2-3t}{5}$ (рис. 5). Чтобы найти абсциссу точки пересечения графиков, решим уравнение

$$5\sqrt{t}=2-3t \Rightarrow 9t^2-37t+4=0.$$

Из рисунка видно, что подходит лишь один корень уравнения: $t=1/9$. Выбрав те значения t, для которых парабола расположена ниже прямой, получаем:

$$0\leqslant t<1/9, \text{ или } -4/5\leqslant x<-7/9.$$

Решите самостоятельно следующие неравенства, предлагавшиеся на вступительных экзаменах:

1. $\log_6((x-1)(x-5))\leqslant 1.$
2. $\log_{0,3}(x^2-x-20)-\log_{0,3}(x+4)>0.$
3. $\sqrt{\log_3\frac{2x-3}{1-x}}<1.$
4. $|x^2-4x|<5.$
5. $\log_{\frac{1}{4}}\frac{x-3}{x+3}\geqslant-\frac{1}{2}.$
6. $0{,}5^{x}\leqslant 0{,}25^{x^2-0{,}5}.$
7. $|x|>2\sqrt{x^2-2x+1}.$
8. $3x+\sqrt{5x+9}<-5.$
9. $\log_{\frac{1}{2}}(\sqrt{x+1}-x)<2.$
10. Найдите область определения функции $y=\sqrt{\log_2(5-x)-1}$.

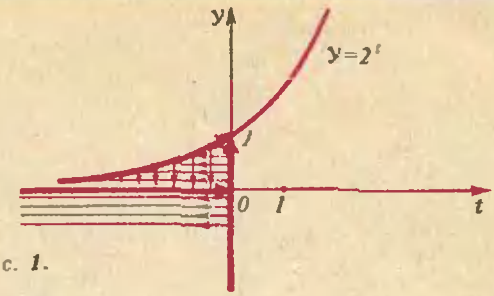


Рис. 1.

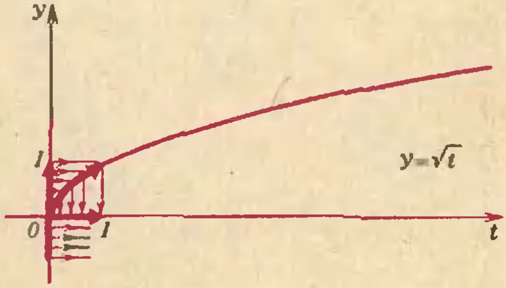


Рис. 2.

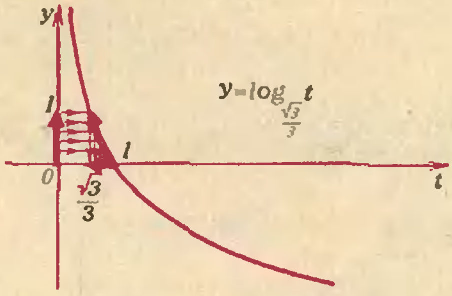


Рис. 3.

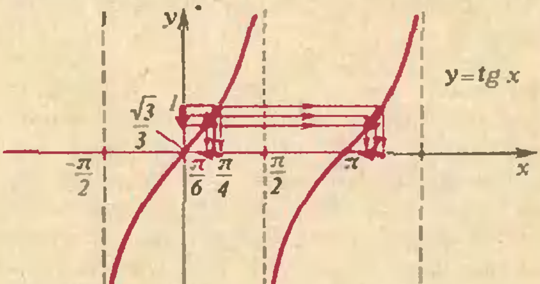


Рис. 4.

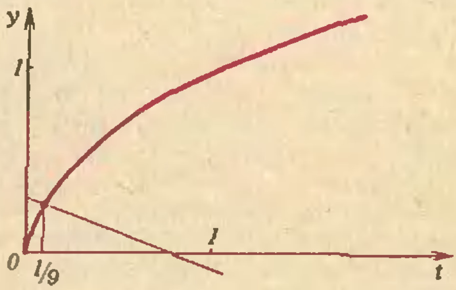
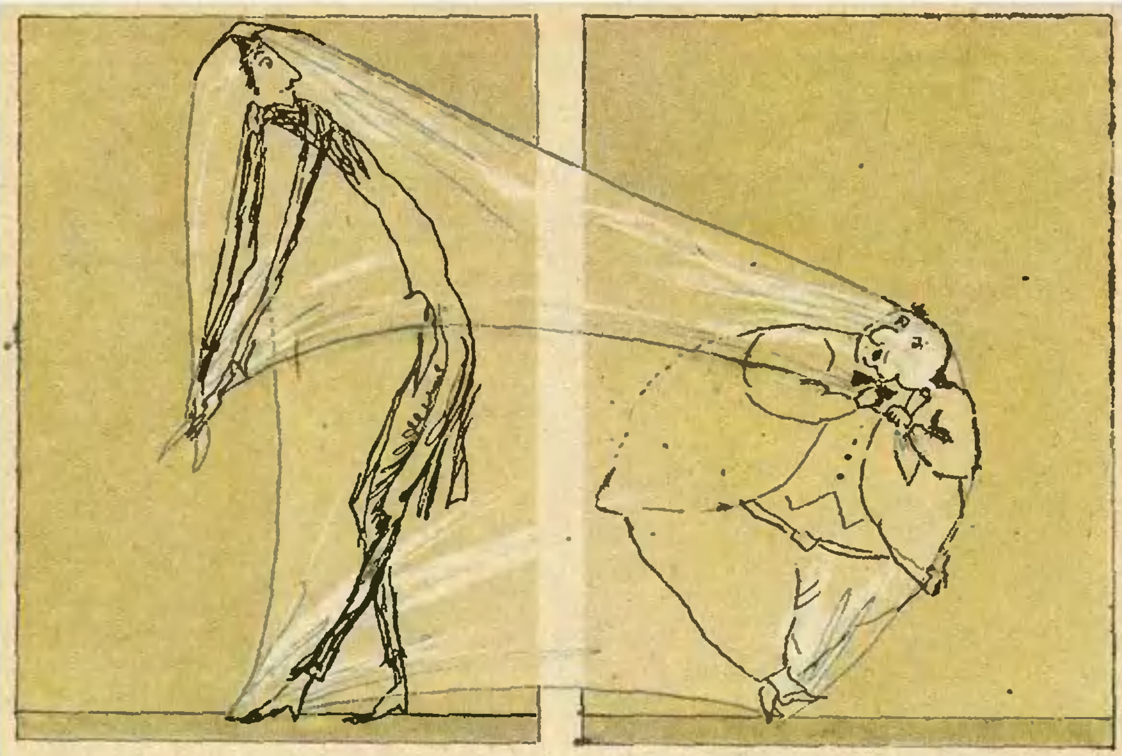


Рис. 5.



Практикум абитуриента

Поверхностное натяжение и капиллярные явления

Кандидат физико-математических наук
А. И. БУЗДИН,
кандидат физико-математических наук
С. С. КРОТОВ

Вступительные экзамены в вузы по физике в прошлом году проводились по новой программе, в которую включен ряд вопросов, отсутствующих раньше. Так, появилась новая тема «Свойства поверхности жидкости. Поверхностное натяжение. Смачивание. Капиллярные явления» (мы привели дословную формулировку), которая дает возможность экзаменационным комиссиям предложить задачи и по этому кругу вопросов.

Поскольку задачи такого типа в пособиях для подготовки в вузы последних лет практически отсутствуют, а тема содержит большое число тонкостей, при написании этой статьи мы стремились упредить возможные неожиданные экзаменационные ситуации. Отчасти поэтому мы уделяем больше внимания обсуждению отдельных теоретических вопросов, а не занимаемся только решением стандартных задач.

Поверхностное натяжение

Для начала стоит сказать несколько слов о специфике сил поверхностного натяжения, действующих на границе жидкости и ее пара.

Как известно, молекулы жидкости находятся так близко друг к другу, что взаимодействие между ними не учитывать нельзя. Поэтому при оценке внутренней энергии системы жидкость — пар существенную роль играет не только кинетическая энергия движения молекул, но и потенциальная энергия их взаимодействия.

Характерный радиус взаимодействия молекул жидкости приблизительно равен среднему расстоянию между ними, так что каждая молекула фактически взаимодействует лишь с ближайшими соседями. Молекулы вблизи свободной поверхности жидкости находятся в особом положении по сравнению с объемными молекулами, поскольку они взаимодействуют с молекулами как жидкости, так и ее пара (а это взаимодействие существенно слабее). Можно сказать, что на молекулы приповерхностного слоя приходится иная доля потенциальной энергии системы, чем на объемные молекулы.

Понятно, что при возможных изменениях формы жидкости при заданном объеме и фиксированной температуре внутренняя энергия, отвечающая объемным молекулам, не меняется, а вклад поверхностной энергии будет тем больше, чем больше будет площадь свободной поверхности жидкости.

Коэффициентом поверхностного натяжения жидкости σ называют отношение работы ΔA, которую необходимо совершить, чтобы увеличить площадь поверхности жидкости на величину ΔS, к величине ΔS, т. е.

$$\sigma = \frac{\Delta A}{\Delta S},$$

или можно сказать, что коэффициент поверхностного натяжения равен поверхностной энергии, приходящейся на единицу площади поверхности.

Объектами, в поведении которых наиболее ярко проявляется роль поверхностной энергии, являются мыльные пленки.

Рассмотрим следующую ситуацию. На мыльной пленке плавает петля из нити длиной l (рис. 1, *а*). Часть пленки, находящуюся внутри нити, осторожно прокалывают. Какую фигуру образует при этом нить? Каково натяжение нити в положении равновесия, если коэффициент поверхностного натяжения мыльного раствора σ?

Очевидно, что после прокалывания оставшаяся пленка будет вести себя так, чтобы максимально уменьшить величину своей поверхности. Это приведет к тому, что при заданной длине нити (l) дырка образует фигуру максимальной площади. Как известно, такой фигурой будет круг (рис. 1, *б*). Радиус круга найдем из соотношения

$$2\pi r = l, \text{ т. е. } r = \frac{l}{2\pi}.$$

Для определения натяжения нити рассмотрим малый элемент ее длины $\Delta l = r\Delta\varphi$ (рис. 2). Он находится под действием двух сил натяжения $\vec{T}_1$ и $\vec{T}_2$ ($T_1 = T_2 = T$), действующих со стороны соседних к элементу участков нити и направленных по касательным, и силы $2\vec{F}_н$ поверхностного натяжения мыльной пленки ($\vec{F}_н$ — сила со стороны одной поверхности пленки). Из условия равновесия элемента нити получим (проектируя силы на направление к центру круга):

$$2T\frac{\Delta\varphi}{2} - 2F_н = 0$$

(мы учли малость элемента и положили $\sin\varphi = \varphi$). Чтобы найти силу $F_н$, дадим пленке (мысленно) возможность еще сократиться, так что элемент Δl переместится на величину Δs. Энергия пленки при этом уменьшится на $\Delta E = 2\sigma\Delta l \cdot \Delta s$ за счет работы сил

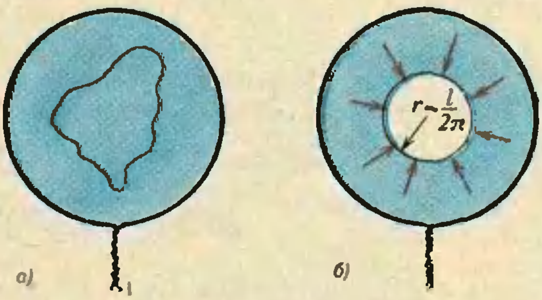


Рис. 1.

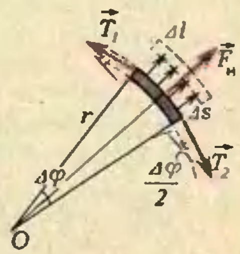


Рис. 2.

натяжения пленки $\Delta A = 2F_н \Delta s$. Откуда

$$\Delta E = \Delta A, \text{ и } F_н = \sigma \Delta l.$$

Таким образом, коэффициент поверхностного натяжения (характеризующий в данном случае одну из поверхностей мыльной пленки) получает еще одну интерпретацию — это сила, действующая на единичный линейный элемент границы поверхности и перпендикулярная этому элементу:

$$\sigma = \frac{F_н}{\Delta l}.$$

Поскольку $T\Delta\varphi = 2F_н$, натяжение веревки будет равно

$$T = 2\frac{F_н}{\Delta\varphi} = \sigma\frac{l}{\pi}.$$

Мы подробно остановились на этой задаче потому, что она показывает, откуда берут свое происхождение силы поверхностного натяжения. Оказывается, для проведения количественных расчетов удобно представление о том, что наличие поверхностной энергии эквивалентно тому, как если бы поверхность жидкости находилась в растянутом состоянии. При этом считают, что силы, растягивающие пленку, приложены к ее линейной границе. Если границу эту мысленно провести, деля пленку на две части, то части будут взаимодействовать между собой с силами, перпендикулярными границе. Казалось бы, все это очень похоже на растяжение резиновой пленки. И тем не менее, имеется принципиальное отличие. Состоит оно в том, что по мере увеличения поверхности пленки жидкости силы поверхностного натяжения остаются постоянными, тогда как при увеличении растяжения резиновой пленки натяжение в ней увеличивается. Итак, аналогия действительно есть, но пользоваться ею нужно осторожно. Тем не менее, при решении задач «силовой язык» часто оказывается более привычным, и им тоже стоит овладеть. Рассмотрим в связи с этим такие задачи.

Задача 1. *Пленки двух жидкостей разделены подвижной планкой*

Рис. 3.

длиной l (рис. 3). Коэффициент поверхностного натяжения одной жидкости σ_1, другой σ_2. С какой силой нужно действовать на планку, чтобы она находилась в покое?

Пусть, для определенности, $\sigma_2 > \sigma_1$. Предоставленная самой себе, система стремится к состоянию с минимальной поверхностной энергией, при этом пленка с бóльшим коэффициентом поверхностного натяжения будет стремиться сократиться, растягивая при этом другую пленку и перемещая планку. Сила, действующая со стороны правой жидкости, будет равна $F_2 = 2\sigma_2 l$, а со стороны левой — $F_1 = 2\sigma_1 l$ (мы учли, что пленки имеют две поверхности). Чтобы планка находилась в равновесии, к ней, очевидно, необходимо приложить силу

$$F = F_2 - F_1 = 2(\sigma_2 - \sigma_1)l.$$

Задача 2. *Внешний радиус мыльного пузыря R, толщина его стенки h. Чему равно давление воздуха внутри пузыря? Чему равно давление в толще мыльной пленки? Считать, что пленка тонкая ($h \ll R$). Давление воздуха вне пузыря p_0. Коэффициент поверхностного натяжения мыльного раствора σ.*

Хорошо знакомая всем сферическая форма мыльных пузырей обусловлена действием сил поверхностного натяжения. Действительно, если потенциальной энергией мыльной пленки в поле тяжести можно пренебречь по сравнению с ее поверхностной энергией (для тонких пленок это как раз имеет место), то последняя и будет ответственна за наблюдаемую геометрию. Но при неизменном объеме воздуха, содержащегося внутри пузыря, фигурой с наименьшей площадью поверхности будет шар. Следовательно, в равновесном состоянии пленка будет иметь форму сферической оболочки.

Разобьем (мысленно) сферическую оболочку на две равные половины и рассмотрим одну из них (рис. 4). Запишем условие равновесия внешней и внутренней полусферических поверхностей. На внешнюю (радиусом R) действуют сила внешнего давления $F_1 = p_0 \pi R^2$ (покажите это самостоятельно), направленная вниз, сила по-

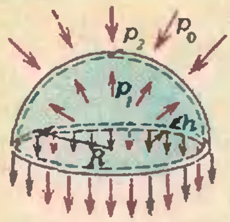


Рис. 4.

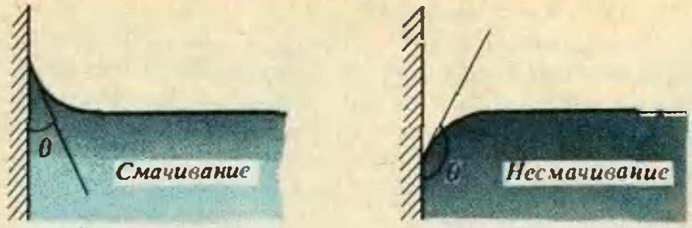


Рис. 5.

верхностного натяжения $F_2=\sigma\cdot 2\pi R$, направленная вниз, и противодействующая им направленная вверх сила давления сжатой жидкости (изогнутой жидкой пленки) $F_3=p_2\pi R^2$. Равновесие пленки означает, что

$$F_1+F_2-F_3=0,$$

т. е.

$$p_0\pi R^2+2\pi R\sigma=p_2\pi R^2,$$

откуда получаем искомое давление в толще пленки:

$$p_2=p_0+\frac{2\sigma}{R}.$$

На внутреннюю поверхность действуют сила давления жидкой пленки, направленная вниз и равная $F_4=p_2\pi(R-h)^2$, сила поверхностного натяжения $F_5=\sigma\cdot 2\pi(R-h)$, направленная вниз, и направленная вверх сила давления воздуха внутри пузыря $F_6=p_1\pi(R-h)^2$. Условие равновесия внутренней поверхности дает, что

$$F_4+F_5-F_6=0,$$

откуда находим давление воздуха внутри пузыря:

$$p_1=p_2+\frac{2\sigma}{R-h},$$

или

$$p_1=p_0+2\sigma\left(\frac{1}{R}+\frac{1}{R-h}\right).$$

Капиллярные явления

Рассмотрим теперь, как будет себя *вести поверхность жидкости* вблизи стенок сосуда, в который она налита.

Очевидно, что с учетом стенок сосуда в общее выражение для энергии системы жидкость — пар — стенки сосуда добавятся еще два слагаемых. Это энергия взаимодействия молекул жидкости с молекулами стенок (при данной температуре она тем больше, чем больше поверхность соприкосновения жидкости и сосуда) и энергия взаимодействия молекул пара и стенок. Равновесное положение поверхности жидкости и ее пара вблизи стенок сосуда установится таким, чтобы общая потенциальная энергия системы приняла минимальное значение. В большинстве случаев это приводит к тому, что поверхность жидкости вблизи стенок искривляется.

Так, если взаимодействие молекул жидкости и стенок сосуда оказывается наибольшим по сравнению с другими молекулярными взаимодействиями — жидкость смачивает сосуд,— граница раздела жидкости с паром вблизи стенок «ползет» вверх, образуя некоторый угол θ с вертикалью (рис. 5). Угол θ называется краевым углом. При фиксированной температуре он будет всегда одним и тем же для заданной жидкости и материала стенок. Чем сильнее взаимодействие молекул жидкости с молекулами стенок сосуда, по сравнению с взаимодействием молекул самой жидкости, тем меньше угол θ. В пределе, когда $\theta\to 0$, говорят, что жидкость полностью смачивает материал стенок сосуда. Наоборот, когда притяжение молекул жидкости друг к другу превалирует над притяжением молекул жидкости и стенок сосуда, имеем случай несмачивающей жидкости. При этом угол θ — тупой. В пределе, когда $\theta\to\pi$, говорят о полном несмачивании, и граница жидкости вблизи стенок сосуда ведет себя так, как будто жидкость отталкивается от сосуда.

Проиллюстрируем сказанное следующей задачей.

Задача 3. *В тонкой горизонтально расположенной цилиндрической трубке находится капля: а) смачивающей; б) несмачивающей жидкости. Что произойдет с каплей, если* *трубку (с одного конца) нагреть?*

Поскольку коэффициент поверхностного натяжения зависит от температуры (уменьшается с ее ростом), при нагревании одного конца трубки, например левого, силы поверхностного натяжения справа начнут доминировать, и капля поползет — направо, если жидкость смачивает, и влево, если не смачивает материал трубки.

Кстати, ответьте самостоятельно на такой вопрос. Для того чтобы водоотталкивающая мазь лучше впитывалась в лыжные ботинки, как их нужно нагревать: снаружи или изнутри?

Рассмотрим теперь стандартную экзаменационную задачу прошлых лет.

Задача 4. *Чему равна высота поднятия жидкости между двумя вертикальными параллельными стеклянными пластинами, расстояние между которыми d (рис. 6)? Коэффициент поверхностного натяжения σ, плотность жидкости ρ, смачивание полное.*

Пусть ширина пластины L, тогда по периметру верхней границы жидкости вдоль стеклянных пластин действует сила поверхностного натяжения $F_н = 2\sigma L$ (коэффициент «2» появляется из-за того, что пластин две), направленная вертикально вверх, поскольку смачивание полное. Эта сила удерживает жидкость между пластинами, а значит, она равна силе тяжести этой жидкости:

$$F_н = \rho g L d h$$

(Ldh — объем жидкости, поднявшейся между пластинами). Используя полученное ранее выражение для $F_н$, окончательно находим высоту поднятия жидкости:

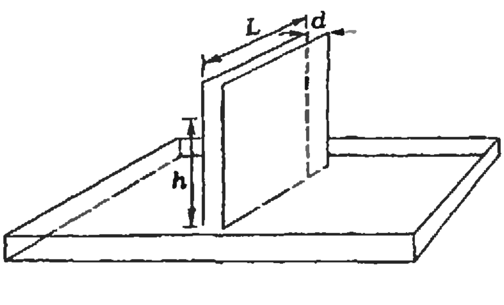


Рис. 6.

$$h = \frac{2\sigma}{\rho g d}.$$

Как видно из решения этой задачи, высота поднятия жидкости тем больше, чем меньше зазор между пластинами. Наиболее ярко этот эффект проявляется в тонких трубках — капиллярах (капиллярные явления, капиллярность). Для высоты поднятия жидкости в капилляре справедлива формула

$$h = \frac{4\sigma}{\rho d},$$

где d — диаметр капилляра (постарайтесь самостоятельно вывести эту формулу).

Капиллярные явления встречаются очень часто: благодаря капиллярности фитиль обеспечивает горение керосиновой лампы, перьевые ручки, которые теперь почти полностью вытеснены шариковыми, позволяют писать на листе бумаги, приложенном даже к вертикальной стене, и т. п. Кстати, подумайте над таким вопросом. В невесомости обычная шариковая ручка отказывает, а перьевая — ?

Посмотрим теперь на предыдущую задачу с другой стороны. Поднятие жидкости между пластинами означает, что давление непосредственно под вогнутой поверхностью жидкости меньше, чем давление под ее горизонтальной поверхностью (где оно равно атмосферному). Эта разность давлений Δp и уравновешивает давление столба жидкости, заключенного между стеклянными пластинками:

$$\Delta p = \rho g h,$$

или, подставляя найденное выражение для h,

$$\Delta p = \frac{2\sigma}{d}.$$

Теперь нетрудно решить последнюю задачу.

Задача 5. *Между двумя горизонтальными квадратными стеклянными пластинками находится прослойка воды толщиной $d = 0{,}3$ мм. Какую силу необходимо приложить к пластинкам перпендикулярно поверхности, чтобы их разорвать? Сторона пластинки $a = 10$ см, коэффициент поверхностного натяжения воды $\sigma = 7{,}3 \cdot 10^{-2}$ Н/м, смачивание полное.*

Давление в жидкости между пластинами на величину $\Delta p = 2\sigma/d$ меньше атмосферного. Это означает, что пластинки прижаты друг к другу силой $F = \Delta p S$, где $S = a^2$ — площадь пластинки. Чтобы оторвать одну пластинку от другой, именно эту силу и необходимо скомпенсировать. В результате, подставляя численные данные, находим силу отрыва:

$$F = \frac{2\sigma}{d}a^2 = 4{,}8\ \text{Н}.$$

Однако, как оказывается, ничего не стоит разъединить пластинки, опустив их в воду. Можно также облегчить задачу, сдвигая их друг относительно друга.

Для самоконтроля предлагаем вам решить следующие задачи.

Упражнения

1. Какую относительную ошибку допускают при измерении атмосферного давления по высоте ртутного столбика, если внутренний диаметр барометрической трубки $d = 5$ мм, а коэффициент поверхностного натяжения ртути $\sigma = 0{,}48$ Н/м? Занижает или завышает показания такой барометр?

2. Капиллярная трубка погружена в воду таким образом, что длина непогруженной части

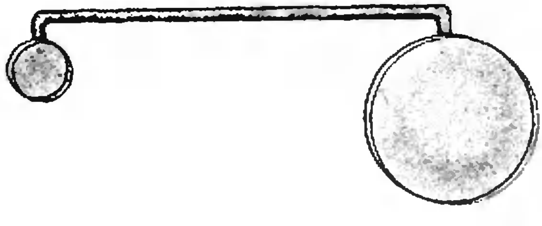


Рис. 7.

составляет $l = 0{,}2$ м. Вода поднялась в трубке на высоту $l/2 = 0{,}1$ м. В этом положении верхний конец трубки зажимают пальцем и трубка погружается в воду до тех пор, пока уровень воды в трубке не сравняется с уровнем воды в сосуде. Найдите длину выступающей из воды части трубки в этом положении. Внешнее атмосферное давление $p_0 = 10^5$ Па.

3. Два мыльных пузыря разных размеров соединены трубкой (рис. 7). Какой из них будет сдуваться?

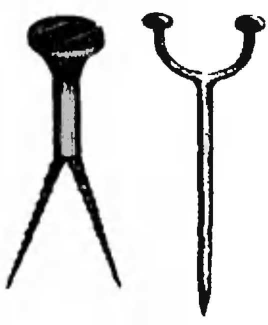
4. Брезентовая палатка хорошо защищает от дождя, но если во время дождя к потолку палатки прикоснуться рукой, потолок начинает «протекать»? Почему?

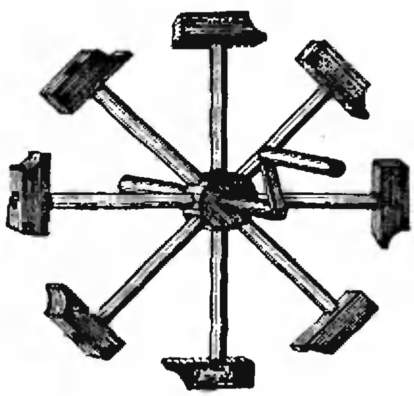
5. Куда будет двигаться капля смачивающей жидкости в горизонтально расположенном коническом капилляре?

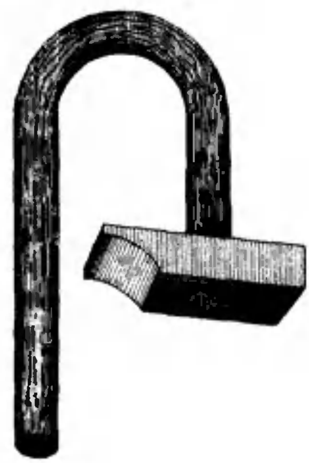
6. На мыльном пузыре радиусом R «сидит» пузырь радиусом r. Какой радиус кривизны имеет пленка, их разделяющая?

„Квант" улыбается

Технические новинки







Шуруп с двумя концами. Чтобы скрепить две доски, достаточно одного такого шурупа. Прочность соединения гарантируется.

Двухголовый гвоздь. Весьма полезен любителям поделок, страдающим косоглазием.

Полимолоток. Быстровращающийся восьмиглавый молоток обеспечивает значительную экономию времени.

Изогнутый молоток. Его специальная форма позволяет легко добираться до самых труднодоступных гвоздей.

Из «Каталога несуществующих объектов»

Варианты вступительных экзаменов

Ленинградский государственный университет им. А. А. Жданова

Математика

Письменный экзамен

Вариант 1

(факультеты математико-механический, физический, прикладной математики — процессов управления)

1. Сумма цифр некоторого трехзначного числа равна 11. Если из числа, записанного теми же цифрами, но в обратном порядке, вычесть 594, то получится искомое число. Найдите это трехзначное число, если известно, что сумма трех попарных произведений цифр этого числа равна 31.

2. Решите неравенство $x-\sqrt{1-x}\leqslant 0$.

3.1. *(математико-механический факультет)* Числа x, y, a таковы, что

$$\begin{cases} x+y=a-1, \\ x^2+y^2=5a^2-3a+0{,}5. \end{cases}$$

При каком a произведение xy принимает наибольшее значение?

3.2 *(физический факультет)* Решите уравнение

$$\log_{3x+7}(9+12x+4x^2)+\log_{2x+3}(6x^2+23x+21)=4.$$

3.3. *(факультет прикладной математики — процессов управления)* Решите уравнение

$$8\cos x=\frac{1}{\cos x}+\frac{\sqrt{3}}{\sin x}.$$

4. Найдите площадь квадрата, вписанного в прямоугольный треугольник с катетами a и b (сторона квадрата лежит на гипотенузе, а две вершины — на катетах треугольника).

5. Все четыре грани треугольной пирамиды — равные равнобедренные треугольники, длина боковых сторон которых равна $\sqrt{3}$. Найдите длину оснований этих треугольников, если известно, что объем пирамиды равен $\frac{2}{3}$.

Вариант 2

(биолого-почвенный факультет)

1. Два лыжника стартовали один за другим с интервалом в 2 мин. Второй лыжник догнал первого на расстоянии 1 км от точки старта. Дойдя до поворота на отметке 5 км, второй лыжник повернул обратно и встретился с первым лыжником. Эта встреча произошла через 20 мин после старта первого лыжника. Найдите скорость первого лыжника.

2. Решите уравнение

$$\log_3(3^x-8)=2-x.$$

3.1. *(отделение почвоведения)* Решите уравнение

$$\sqrt{10-18\cos x}=6\cos x-2.$$

3.2 При каких a уравнение $\cos\left(\sqrt{a-x^2}\right)=1$ имеет ровно 8 решений?

4. В окружность радиуса r вписана равнобедренная трапеция с острым углом α при основании и высотой h. Найдите площадь трапеции.

5. Объем правильной треугольной призмы равен V, угол между диагоналями двух граней, проведенными из одной и той же вершины, равен α. Найдите сторону основания призмы.

Вариант 3

(географический и геологический факультеты)

1. Два мотоциклиста, выехав одновременно из пункта A, едут с разными, но постоянными скоростями в пункт B и, достигнув его, сейчас же поворачивают обратно. Первый мотоциклист, обогнав второго, встречает его на обратном пути на расстоянии 13 км от B, затем, достигнув A и снова повернув обратно к B, он встречает второго мотоциклиста, проехав $\frac{1}{7}$ расстояния от A до B. Найдите расстояние от A до B.

2.1. *(географический факультет).* Решите уравнение

$$\frac{\log_3\left(\frac{3}{x}\right)}{\log_x 2}-\log_3\left(\frac{x^3}{\sqrt{3}}\right)=\frac{1}{2}+\log_2\sqrt{x}.$$

2.2. *(геологический факультет)* Решите уравнение

$$\sqrt{1+4x-x^2}=x-1.$$

3. Решите уравнение

$$\sin 7x-\sin x+2\cos^2 2x=1.$$

4. Найдите углы прямоугольного треугольника, если известно, что радиус вписанной окружности равен 2, а гипотенуза — 13.

5.1. *(географический факультет)* Угол между боковым ребром и основанием правильной четырехугольной пирамиды равен 60°, боковое ребро равно a. Через середину одного из боковых ребер перпендикулярно к нему проведена плоскость. Найдите площадь сечения.

5.2. *(геологический факультет)* Решите неравенство

$$\log_{\frac{x+1}{5}}(x^2-6x+9)\geqslant 0.$$

Вариант 4

(химический факультет)

1. Из колбы, в которой имеется 80 г 10-процентного раствора поваренной соли, отливают некоторую часть раствора в пробирку и выпаривают до тех пор, пока процентное содержание соли в пробирке не повысится втрое. После этого выпаренный раствор выливают обратно в колбу. В результате содержание соли в колбе повышается на 2 %. Какое количество раствора отлили из колбы в пробирку?

2. Решите уравнение $(x^2-4)\sqrt{x+1}=0$.

3. Решите уравнение

$$\sin x=\sqrt{\sin^2 3x-\sin^2 2x}.$$

4. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты CD и AE. Найдите длину высоты AE, если известно, что $AD = BC = 4$, $AB = 6$.

5. Вычислите объем правильной треугольной пирамиды, зная, что плоский угол при вершине равен α, а радиус окружности, описанной около боковой грани, равен r.

Вариант 5

(факультеты психологии и экономический)

1. Из пункта A в пункт B выехал грузовой автомобиль. Через 1 ч из пункта A в пункт B выехал легковой автомобиль, который прибыл в пункт B одновременно с грузовым автомобилем. Если бы грузовой и легковой автомобили одновременно выехали из пунктов A и B навстречу друг другу, то они бы встретились через 1 ч 12 мин после выезда. Сколько времени провел в пути от A до B грузовой автомобиль?

2.1. *(отделение политэкономии)*
Решите уравнение $x = 1 + \sqrt{7 - x}$.

2.2. Решите уравнение

$$\sqrt{7x+1} - \sqrt{3x-18} = \sqrt{2x+7}.$$

3.1. *(экономический факультет)*
Решите неравенство

$$x^{2 \lg x} \geqslant 10x.$$

3.2. *(факультет психологии)*
Решите уравнение

$$2 \sin x + 2 \cos x + 1 = \sin 2x + 4(\sin^3 x + \cos^3 x).$$

4. Около прямоугольного треугольника описана окружность. Найдите катеты этого треугольника, если известно, что расстояния от концов гипотенузы до прямой, касающейся окружности в вершине прямоугольного треугольника, равны a и b.

5.1. *(факультет психологии и отделение экономической кибернетики)*
Центр сферы совпадает с центром основания кругового конуса, а ее радиус равен радиусу основания конуса. Найдите радиус окружности, по которой сфера пересекает поверхность конуса, если известны высота конуса H и угол его осевого сечения α.

5.2. *(отделение политэкономии)*
Изобразите на плоскости множество точек $M(x, y)$, для которых $2|x - y - 2| \leqslant 3 - x^2 - y^2$.

Вариант 6

(отделение математической лингвистики филологического факультета)

1. От пристани A одновременно отправились вниз по течению катер и плот. Катер спустился вниз по течению на 96 км, затем повернул обратно и вернулся в A через 14 час. Найдите скорость катера в стоячей воде и скорость течения, если известно, что катер встретил плот на обратном пути на расстоянии 24 км от A.

2. Решите уравнение

$$\log_{1+x}(2x^3 + 2x^2 - 3x + 1) = 3.$$

3. Найдите все решения неравенства $\sqrt{\frac{1}{2} - \cos 2x} > \sin x - \cos x$, удовлетворяющие условию $0 \leqslant x \leqslant \pi$.

4. Вне квадрата $ABCD$ дана точка O. Найдите площадь квадрата, если известно, что $OA = OB = 5$, $DO = \sqrt{13}$.

5. В правильной четырехугольной пирамиде двугранный угол при основании равен α. Найдите двугранный угол при боковом ребре.

Публикацию подготовил А. С. Меркурьев

Ленинградский государственный педагогический институт им. А. И. Герцена

Математика

Задачи устного экзамена

Математический факультет

1. Вычислите без таблиц

$$\sin 6° - \sin 42° - \sin 66° + \sin 78°.$$

2. Решите уравнение

а) $(x^2 + x + 1)(2x^2 + 2x - 3) = -3(1 - x - x^2)$;

б) $(\sin x - \cos x)(1 + \operatorname{tg}^2 x) = 4 \sin x(1 - \operatorname{tg}^2 x)$.

3. Решите неравенство:

$$4^{\log_4(4x-5) - \log_4(x+1)} \geqslant 0{,}25^{\log_4 27 - 2}.$$

4. Найдите экстремумы функции

$$f(x) = x - \cos 2x.$$

5. Докажите, что если медиана и высота, проведенные из одной вершины треугольника, делят угол треугольника на три равные части, то треугольник — прямоугольный.

6. Докажите, что квадрат биссектрисы угла треугольника равен разности между произведением боковых сторон и произведением отрезков основания.

7. На основаниях AB и CP вне трапеции $ABCP$ построены квадраты. Докажите, что прямая, соединяющая их центры, проходит через точку пересечения диагоналей трапеции.

8. Основание пирамиды — прямоугольная трапеция, у которой бо́льшая из боковых сторон равна 12, а меньший угол 30°. Все боковые грани пирамиды одинаково наклонены к плоскости основания. Площадь боковой поверхности равна 90. Найдите объем пирамиды.

9. Ребро куба равно a. Найдите расстояние между диагональю куба и не пересекающей ее диагональю грани.

Физический, индустриально-педагогический, химический факультеты

10. Укажите знак числа $\log_{0,3}\left(\frac{10}{7}(\log_2 5 - 1)\right)$.

11. Зная, что $\lg 64 = k$, найдите $\lg \sqrt[3]{25}$.

12. При каких значениях a выполняется равенство

$$\frac{a+5}{a-5}\sqrt{a^2 - 10a + 25} = -5 - a?$$

13. Докажите тождество

$$2(\sin^6 x + \cos^6 x) - 3(\sin^4 x + \cos^4 x) + 1 = 0.$$

14. Решите уравнение

а) $||1 - |x|| - 2| = 1$;

б) $\log^2_{\frac{1}{2}}(4x) + \log_2\left(\frac{x^2}{8}\right) = 8$.

15. Решите неравенство

а) $\log_{\frac{2}{5}}(7x+8)-\log_{\frac{2}{5}}(x^2+5x)<0$;

б) $(a^2-3a+4)\log_{\frac{1}{2}} a\leqslant 0$.

16. Найдите область определения функции

$$y=\frac{\sqrt{x+8}}{\log_{0,3}\left(x^2+\frac{3}{2}x\right)}.$$

17. Постройте график функции

а) $y=(2-x^2)\dfrac{3x+5}{|3x+5|}$;

б) $y=(0{,}6)^{\log_{\frac{3}{5}}(8-3x)}$

в) $y=\sqrt{(4-3x)^2}-7$.

18. Даны два круга, которые касаются внешним образом. Радиусы кругов — 3 и 6. Найдите расстояние от точки касания до общей внешней касательной.

19. В равнобедренной трапеции диагонали взаимно перпендикулярны. Найдите высоту трапеции, если ее основания равны 4 и 6.

20. Найдите высоту пирамиды, если ее основанием служит прямоугольник, одно из боковых ребер перпендикулярно плоскости основания, а длины других ребер равны 7, 8 и 4.

21. Основанием прямой призмы служит ромб. Диагонали призмы — 8 и 5, высота призмы равны 2. Найдите площадь основания.

22. Ребро куба равно 2. Через диагональ куба проведена плоскость, параллельная диагонали основания, не имеющей с диагональю куба общих точек. Найдите площадь полученного сечения.

Публикацию подготовил *Т. Ф. Кириченко*

Ленинградский политехнический институт им. М. И. Калинина

Математика

Письменный экзамен

Вариант 1

(факультеты физико-механический и радиофизический)

1. Решите уравнение

$$\frac{13}{14(6^x+2)}+\frac{31}{36(5\cdot 6^{x-1}-1)}-\frac{32}{21(2\cdot 6^x-3)}=0.$$

2. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 25x+9y^2=-37, \\ 5(x+2)^{1/2}y=2. \end{cases}$$

3. Решите уравнение

$$10\sin^2 x+3\cos^2 x+3\sin 2x=2.$$

4. Решите неравенство

$$63+8\left(\log_{1/3}\frac{x}{27}\right)(\log_{1/3}(27x))+21\log_3 x>0.$$

5. В правильной шестиугольной пирамиде заданы угол α между соседними боковыми гранями и объем V шара, вписанного в пирамиду. Найдите высоту пирамиды.

Вариант 2

(факультеты технической кибернетики и экономики и управления производством)

1. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 35\log_4^2 x+36\log_3^2 y=99, \\ 7\log_{1/4} x-6\log_{1/3} y=1. \end{cases}$$

2. Известно, что $\cos 2x=\frac{4}{5}$. Докажите, что $\operatorname{ctg}^2 3x$ является рациональным числом и найдите это число.

3. Решите неравенство

$$|4x^2+35x+38|>|12x^2+33x+32|.$$

4. Решите уравнение

$$\frac{27-36\cos^2 2x}{36\cos^2 2x+4\cos 6x-27}-\frac{2}{9\cos 2x-6}=0.$$

5. В правильной пятиугольной пирамиде задан двугранный угол φ при боковом ребре. Найдите плоский угол при вершине боковой грани.

Физика

Задачи устного экзамена

1. Пуля ударяет со скоростью $v=400$ м/с в центр шара, подвешенного на нити длиной $l=4$ м, и упруго отскакивает от него. Определите косинус угла, на который отклоняется нить, если масса пули $m=20$ г и масса шара $M=5$ кг.

2. Найдите ускорение цилиндра, скользящего по желобу. Желоб имеет вид двухгранного угла, угол раствора которого 2α, ребро наклонено к горизонту под углом β, а плоскости образуют с горизонтом одинаковые углы. Коэффициент трения между цилиндром и поверхностью желоба μ.

3. По оси X (в ее положительном направлении) движется некоторое тело с постоянной скоростью $v=5$ м/с. Потенциальная энергия тела меняется вдоль оси по закону $W=(-10^{-2}x)$ Дж. Найдите мощность, развиваемую силами сопротивления, препятствующими движению.

4. В запаянной с одного конца стеклянной трубке, длина которой $l=70$ см, находится столбик воздуха, запертый сверху столбиком ртути высотой $h=20$ см, доходящим до верхнего края трубки. Трубку осторожно переворачивают, причем часть ртути выливается. Какова высота столбика ртути, который остается в трубке, если атмосферное давление $p_0=750$ мм рт. ст.? При какой длине трубки столбик ртути той же высоты выльется из трубки полностью?

5. Некоторая масса молекулярного водорода занимает объем $V_1=1$ м^3 при температуре $T_1=250$ К и давлении $p_1=2$ атм. Какое давление будет иметь та же масса водорода при $T_2=5000$ К в объеме $V_2=10$ м^3, если при столь высокой температуре молекулы водорода полностью диссоциируют на атомы?

6. Один моль одноатомного идеального газа сначала нагревают, затем охлаждают так, что замкнутый цикл *1—2—3—1* на p, V-диаграмме состоит из отрезков прямых *1—2* и *3—1*, параллельных осям p и V соответственно, и изотермы *2—3*. Найдите количество теплоты, от-

данное газом в процессе охлаждения. Давление и объем газа в состоянии *1* равны p_1 и V_1, давление газа в состоянии *2* равно p_2.

7. Три одинаковые заряженные частицы, каждая массой $m=2$ г и зарядом $q=10^{-8}$ Кл, поместили в вершинах равностороннего треугольника со стороной $a=10$ см. Затем частицы одновременно освободили, после чего они стали симметрично разлетаться под действием кулоновских сил отталкивания. Найдите максимальное значение скорости частиц.

8. Электрон без начальной скорости прошел разность потенциалов $U_0=10$ кВ и влетел в пространство между пластинами плоского конденсатора, заряженного до разности потенциалов $U=100$ В, по прямой, параллельной пластинам. Расстояние между пластинами $d=2$ см, длина пластин $l=20$ см. Определите расстояние на экране, отстоящем от конденсатора на $L=0{,}5$ м, на которое сместится электрон.

9. При изменении тока в катушке индуктивности на величину $\Delta I=1$А за время $\Delta t=0{,}6$ с в ней индуцируется ЭДС $\mathscr{E}=0{,}2$ мВ. Какую длину будет иметь радиоволна, излучаемая генератором, колебательный контур которого состоит из этой катушки и конденсатора емкостью $C=14{,}1$ нФ?

10. На горизонтальном дне водоема глубиной $h=1{,}2$ м лежит плоское зеркало. На каком расстоянии от места вхождения луча в воду этот луч снова выйдет на поверхность воды после отражения от зеркала? Угол падения луча $\alpha=30°$, показатель преломления воды $n=1{,}33$.

Публикацию подготовили *Ю. Н. Кузьмин, Ю. Д. Максимов, В. Н. Романов, И. Б. Русанов*

Ленинградский электротехнический институт им. В. И. Ульянова (Ленина)

Математика

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Дана функция

$$f(x)=7-x^2-x^4.$$

а) Решите уравнение $f(x)=1$.

б) Найдите наибольшее значение функции f.

в) Решите неравенство $f(x)\geqslant f(\sqrt{x})$

г) Сколько решений имеет уравнение $f(x)=a$ в зависимости от значений параметра a?

2. В треугольнике ABC угол A равен α, $AB=AC=1$. Пусть S — площадь треугольника ABC,

$$g(\alpha)=\frac{AB^2+BC^2+CA^2}{S}.$$

а) Докажите, что $g(\alpha)=4(2-\cos\alpha)/\sin\alpha$.

б) Решите уравнение $g(\alpha)=4\sqrt{3}$.

в) Найдите наименьшее значение функции g.

3. Обозначим через $h(a)$ наибольшее значение многочлена второй степени $x^2-2(a^2-3a+2)x$ на промежутке $[-1,1]$.

а) Докажите, что $h(a)=1+2|a-1||a-2|$.

б) Решите уравнение $h(a)=3/2$.

в) Постройте график функции $h=h(a)$.

Вариант 2

1. Дана система уравнений

$$\begin{cases}\sqrt{x}-y=a,\\ \sqrt{x}\cdot y=1-a.\end{cases}$$

а) Решите систему при $a=2$.

б) При каких значениях a система имеет единственное решение?

в) При каких значениях a система имеет решение (x,y) такое, что $x\geqslant y^2$?

2. В треугольник ABC вписана окружность радиусом 1. Известно, что угол C равен $\pi/3$, угол B равен α. Через $S(\alpha)$ обозначим площадь треугольника, вершинами которого являются точки касания вписанной окружности.

а) Докажите, что

$$S(\alpha)=\frac{3}{4}\sin\alpha+\frac{\sqrt{3}}{4}\cos\alpha+\frac{\sqrt{3}}{4}.$$

б) Найдите область значений функции S.

в) Постройте график функции S.

3. Дана функция

$$f(x)=3-\frac{2}{1+\cos x}-\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}.$$

а) Найдите точное значение $f(x)$, если известно, что

$$\operatorname{tg} x=\frac{3}{4},\ \pi<x<2\pi.$$

б) Докажите, что $f(x)=2-\operatorname{tg}\frac{x}{2}-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}$ при $0\leqslant x<\pi$.

в) Решите неравенство $f(x)\geqslant 0$ на промежутке $[0,2\pi[$.

г) При каких a уравнение $f(x)=a$ имеет по крайней мере одно решение на промежутке $[0,2\pi[$?

Физика

Задачи письменного экзамена

1. Мяч массой $m=100$ г отпустили на высоте $h=2{,}0$ м над полом. Чему равно количество теплоты, выделившееся при первом ударе мяча о пол, если время между первым и вторым ударами мяча о пол $\Delta t=1{,}2$ с? Сопротивлением воздуха пренебречь. Ускорение свободного падения принять равным $g=10$ м/с^2.

2. Гиря массой $m=1$ кг подвешена на нити, разрывающейся при силе натяжения $F=24{,}5$ Н. В натянутом состоянии нить с гирей из вертикального положения переведена в горизонтальное и отпущена. Уцелеет ли нить при прохождении гирей положения равновесия?

3. В баллоне был некоторый газ. При выпускании из баллона части газа температура газа уменьшилась в n раз, а давление уменьшилось в k раз. Какая часть газа выпущена?

4. Под каким давлением находится в баллоне кислород, если емкость баллона $V=5$ л, а средняя кинетическая энергия поступательного движения всех молекул кислорода $E=6$ кДж?

5. Определите работу расширения газа, первоначально занимающего объем $V=10$ л, при изобарическом нагревании от $t_1=17\,^\circ$C до $t_2=104\,^\circ$C. Давление газа $p=100$ кПа.

6. В плоский конденсатор с размерами пластин $a\times b$ вдвигают параллельно стороне a с постоянной скоростью v диэлектрик толщиной d, равной расстоянию между пластинами конденсатора. При этом конденсатор подключен к полюсам батареи, ЭДС которой $\mathcal{E}$. Определите силу тока, возникающего в цепи. Диэлектрическая проницаемость диэлектрика ε.

7. Два заряженных шарика массой $m=5$ г каждый, подвешенные на нерастяжимых нитях длиной $l=1$ м в воздухе, отталкиваясь друг от друга, разошлись на $d=10$ см. Заряды шариков равны. Найдите величину заряда каждого шарика. Размеры шариков малы по сравнению с расстоянием между ними.

8. К батарее подключается резистор сопротивлением R, на котором рассеивается мощность P. При подключении параллельно этому резистору такого же резистора мощность, выделяемая в нагрузке, не изменилась. Определите внутреннее сопротивление батареи.

9. На дифракционную решетку, имеющую период $d=6$ мкм, нормально падает монохроматическая волна. Определите длину волны, если угол между дифракционными максимумами второго и третьего порядков равен $\alpha=3^\circ$. Углы отклонения считать малыми.

10. Найдите скорость фотоэлектронов, вылетевших из цинка при освещении его ультрафиолетовыми лучами длиной волны $\lambda=0{,}3$ мкм, если работа выхода электрона из цинка $A=4$ эВ.

Публикацию подготовили
Ю. В. Богачев, В. А. Егоров, П. П. Каргаев, Г. Д. Лапин, Б. А. Лифшиц

Московский авиационный институт им. Серго Орджоникидзе

Математика

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Решите уравнение
$$\sqrt{x-2}+\sqrt{x-1}=1.$$

2. Постройте график функции $y=\sin(x+\pi)+1$. Напишите уравнение касательной к графику в точке с абсциссой $\pi/4$.

3. Второй член убывающей арифметической прогрессии равен 10. Если первый член прогрессии увеличить на 2, второй оставить без изменений, а третий увеличить на 3, то полученные три числа будут последовательными членами геометрической прогрессии. Найдите сумму первых четырех членов арифметической прогрессии.

4. Решите уравнение
$$\sin 2x=\sin x\,(\sin x+\cos x).$$

5. В треугольнике ABC проведены две высоты BM и CN, причем $AM:CM=2:3$. Найдите отношение площадей треугольников BMN и ABC, если острый угол BAC равен α.

6. Решите неравенство
$$\log_x\frac{12-4x}{4-x}\leqslant 1.$$

7. Найдите все такие действительные a, при которых множество значений x, удовлетворяющих неравенству
$$x^2(x-1)-a\,|x|\,(x+2)\leqslant 0,$$
является промежутком числовой оси.

8. Основанием пирамиды служит прямоугольный треугольник с острым углом, равным α. Боковые ребра образуют с плоскостью основания равные углы величиной β. Найдите объем пирамиды, если длина бокового ребра равна b.

Вариант 2

1. Решите уравнение
$$\sqrt{5-x^2}=x-1.$$

2. Найдите $\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$, если $\cos\alpha=a$ и $\alpha\in\left(\pi;\frac{3\pi}{2}\right)$.

3. Решите уравнение
$$(\log_2 x-3)\sin x=\sqrt{1-\cos^2 x}\,.$$

4. Найдите область определения функции
$$f(x)=\log_x(7+8x-12x^2).$$

5. Решите систему уравнений
$$\begin{cases} x+y=1,\\ 3^x+3^y=4.\end{cases}$$

6. Длины меньшей диагонали ромба, стороны и большей диагонали являются последовательными членами геометрической прогрессии. Найдите величины углов ромба.

7. Известно, что график функции $y=f(x)+2g(x)$ представляет собой прямую AB, проходящую через точки $A\,(-1;\,3)$ и $B\,(1;\,2)$, а график функции $y=3f(x)-g(x)$ является прямой, симметричной прямой AB относительно оси ординат. Найдите функции $f(x)$ и $g(x)$ и постройте их графики.

8. В правильной треугольной пирамиде $SABC$, высота которой в два раза больше стороны основания, на боковых ребрах SB и SC взяты точки M и N так, что MN параллельна BC. Через прямую MN проходят плоскости α и β. Плоскость α перпендикулярна плоскости грани SBC и содержит точку A, плоскость β проходит через середину бокового ребра SA. Найдите отношение площадей сечений пирамиды плоскостями α и β.

Физика

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Работа перемещения заряда в электрическом поле.

2. Тонкий обруч радиусом R раскрутили вокруг его оси до угловой скорости ω_0 и положили на горизонтальный стол. Через какое время обруч остановится, если коэффициент трения между столом и обручем равен μ? Сколько оборотов сделает обруч?

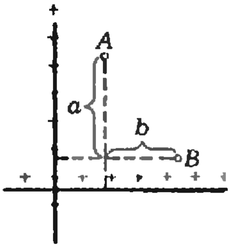


Рис. 1.

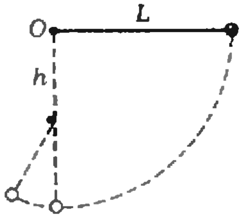


Рис. 2.

3. Для нагревания $m=1$ кг газа на $\Delta T=1$К при постоянном давлении требуется количество теплоты $Q_1=912$ Дж, а для нагревания при постоянном объеме — $Q_2=649$ Дж. Какой это газ?

4. Найдите разность потенциалов между точками A и B электростатического поля, создаваемого двумя бесконечными равномерно заряженными плоскостями с поверхностной плотностью заряда $\sigma_1=2\cdot10^{-7}$ Кл/м^2 и $\sigma_2=4{,}2\cdot10^{-7}$ Кл/м^2, если $a=7$ см, $b=5$ см (рис. 1).

5. Найдите частоту излучения, вырывающего с поверхности металла электроны, которые полностью тормозятся задерживающим напряжением $U_з=3$ В. Фотоэффект у этого металла начинается при частоте излучения $\nu_{\min}=6\cdot10^{14}$Гц. Чему равна работа выхода электрона из этого металла?

Вариант 2

1. Адиабатный процесс.

2. На нити длиной $L=2h$, закрепленной в точке O, подвешен шарик массой m. На расстоянии h от точки O вбит гвоздь. Нить отклонена от положения равновесия на угол $\alpha=90°$ и отпущена (рис. 2). На какую максимальную высоту поднимется шарик после прохождения положения равновесия?

3. Кислород массой $m=8$ г при температуре $t=27$ °С занимает объем $V=200$ л. Определите, каким станет давление кислорода в этом же объеме, если газ превратить в плазму при температуре $T'=10^6$ К, когда все атомы кислорода полностью ионизированы. Сравните с первоначальным давлением.

4. Аккумулятор, внутренним сопротивлением которого можно пренебречь, поочередно замыкали на два равных резистора. Зная, что в первом случае ток $I_1=3$ А, а во втором $I_2=6$ А, найдите ток, текущий через аккумулятор, при замыкании его на эти резисторы, соединенные последовательно.

5. В среде распространяется свет, имеющий длину волны $\lambda=3\cdot10^{-7}$ м и энергию кванта $E=4{,}4\cdot10^{-19}$ Дж. Определите абсолютный показатель преломления среды.

Публикацию подготовили
А. С. Бортаковский, Г. Г. Спирин

Московский энергетический институт

Математика

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Упростите выражение для $f(x)$ и найдите $f'(-1)$, $f'(3)$, если

$$f'(x)=\frac{x^2\sqrt{3}(x^2+\sqrt{3})-2x^2(2-x^2)-6-4\sqrt{3}}{(x^2+\sqrt{3})\sqrt[3]{15\sqrt{3}+26}}-16^{\log_4\sqrt[4]{x^4-4x^2+4}}.$$

2. Решите уравнение

$$\log_4(3\cdot2^{x+2}-8)=x+1.$$

3. Первая труба заполняет бассейн на 4 ч дольше, а вторая — на 9 ч дольше, чем обе при совместной работе. За сколько часов наполняет бассейн каждый из труб?

4. Найдите корни уравнения

$$\sqrt{10-18\cos x}=6\cos x-2,$$

принадлежащие области определения функции $y=\sqrt{\operatorname{tg} x-\sqrt{3}}$.

5. Вычислите объем правильной треугольной пирамиды высотой h, зная, что отношение боковой поверхности пирамиды к площади основания равно k.

6. Сформулируйте определение вектора. Сформулируйте теорему о разложении вектора по трем некомпланарным векторам (без доказательства).

Вариант 2

1. Упростите выражение для $f(x)$ и найдите $f'\left(\frac{1}{2}\right)$, $f'(2)$, если

$$f(x)=\left(2x+1+2\sqrt{x^2+x}-\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}\right)^2+9^{\log_3\sqrt{x^4+1}}.$$

2. Решите уравнение

$$x^2+(2\sqrt{2})^{\log_8(1+x^2-2x)}=1.$$

3. Из пункта A в пункт B в 12 часов вышел пешеход, одновременно навстречу ему выехал велосипедист. По дороге велосипед сломался и простоял 15 мин. Встреча произошла в 13 ч 30 мин. Если бы велосипед не останавливался, встреча произошла бы на 10 мин раньше. Считая скорости пешехода и велосипедиста во время движения постоянными, определите время прибытия пешехода в пункт B и велосипедиста в пункт A.

4. Найдите корни уравнения

$$\sqrt{13-18\operatorname{tg} x}=6\operatorname{tg} x-3,$$

принадлежащие области определения функции $y=\sqrt{13\sin x-2\sqrt{13}}$.

5. В прямой круговой конус, боковая поверхность которого в k раз больше площади основания, вписан шар радиусом R. Найдите объем конуса.

6. Сформулируйте определение параллельности прямой и плоскости. Сформулируйте признак параллельности прямой и плоскости (без доказательства).

Физика

Письменный экзамен

Вариант 1

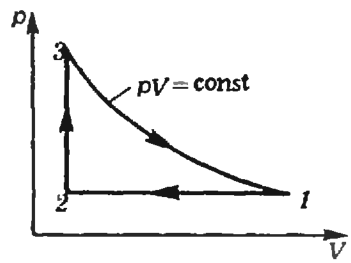
1. Электрический ток. Сила тока. Электрическая цепь. Электрическое удельное сопротивление. Закон Ома для участка электрической цепи. Параллельное и последовательное соединение проводников.

2. При включении электрической лампы величина тока в первый момент отличается от величины тока, который установится после того, как лампа начинает светиться. Как объяснить это явление?

3. Звук выстрела и пуля одновременно достигают высоты $h = 960$ м. Выстрел произведен вертикально вверх. Какова начальная скорость пули? Средняя скорость звука в воздухе $v = 330$ м/с.

4. Льдина постоянной толщины плавает, выступая над уровнем воды на $h = 3$ см. Найдите массу льдины, если площадь ее основания $S = 250$ см^2. Плотность льда $\rho_1 = 0{,}9 \cdot 10^3$ кг/м^3, плотность воды $\rho_2 = 1{,}0 \cdot 10^3$ кг/м^3.

5. Электрон движется со скоростью $\underline{v}$ в однородном магнитном поле с индукцией $\vec{B}$ в плоскости, перпендикулярной линиям магнитной индукции. Определите радиус траектории электрона. Отношение заряда электрона к его массе e/m известно.



Вариант 2

1. Электромагнитные волны и скорость их распространения. Свойства электромагнитных волн. Энергия электромагнитной волны. Изобретение радио А. С. Поповым.

2. Можно ли натянуть канат массой m так, чтобы он не провисал?

3. На рисунке дан график изменения состояния идеального газа в координатах p, V. Представьте этот процесс на графиках в координатах p, T и V, T. Укажите, в каком из процессов газ отдает теплоту, а в каком получает.

4. Камень массой $m = 0{,}5$ кг бросили с высоты $h = 30$ м с начальной скоростью $v_0 = 25$ м/с. Перед ударом о землю скорость камня $v = 30$ м/с. Определите работу сил сопротивления воздуха при движении камня.

5. Два источника тока с ЭДС $\mathscr{E}_1 = 4$ В и $\mathscr{E}_2 = 6$ В и внутренними сопротивлениями $r_1 = 0{,}1$ Ом и $r_2 = 0{,}4$ Ом соединены последовательно. При каком сопротивлении внешней цепи разность потенциалов между зажимами одного из источников будет равной нулю?

Публикацию подготовили А. А. Болотов, А. Т. Комов, В. А. Старшинов, М. Г. Тимошин

Информация

Заочная физическая школа при МГУ

Заочная физическая школа (ЗФШ) при физическом факультете Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова объявляет прием учащихся в 9 и 10 классы на очередной учебный год.

Основная цель ЗФШ — помочь учащимся средней школы глубже изучить физику в объеме школьной программы, а также лучше подготовиться к вступительным экзаменам по физике в высшие учебные заведения. При поступлении на физический факультет МГУ удостоверение об окончании ЗФШ учитывается приемной комиссией.

Прием в ЗФШ проводится по результатам решения вступительного задания, публикуемого ниже. Решение вступительного задания необходимо отослать до *1 сентября* по адресу: 119899 Москва, ГСП, Ленинские горы, МГУ, физический факультет, ЗФШ. В письмо вложите два экземпляра анкеты, написанной на листах плотной бумаги размером 7×12 см и заполненной по приведенному ниже образцу.

Решение приемной комиссии о зачислении в ЗФШ будет сообщено до 20 октября. Проверенные вступительные задания не возвращаются.

Зачисленным в ЗФШ в течение года высылаются методические разработки и контрольные задания по разделам физики, изучаемым в соответствующих классах средней школы. Решенное задание оценивается, рецензируется и высылается обратно. Учащие-

Фамилия, имя, отчество	*Кузнецов Сергей Владимирович*
Класс ЗФШ	*9-й*
Профессия родителей	*мать — врач, отец — инженер*
Подробный домашний адрес	*240816 г. Калуга, ул. К. Либкнехта, д. 4, кв. 73*
Номер и адрес школы	*школа № 10, ул. Пушкина, д. 3*

ся 9 класса ЗФШ по окончании года переводятся в 10 класс на основании оценок, полученных за решение контрольных заданий. Успешно окончившие обучение получают удостоверение об окончании ЗФШ.

Вступительное задание

Поступающим в 9 класс ЗФШ нужно решить задачи 1—4, а поступающим в 10 класс — задачи 4—7.

1. **«Рекорд».** Может ли спортсмен на водных лыжах двигаться быстрее катера-буксировщика?

2. **«Вавилонская башня».** Определите наибольшую высоту бетонной башни, которая может разрушиться под действием собственной тяжести, если допустимое давление на бетон равно 5 МПа.

3. **«Градусник».** Почему измерение температуры медицинским термометром продолжается долго, а «стряхнуть» термометр можно практически мгновенно?

4. **«Дождь».** На улице идет вертикальный дождь. Скорость капель u. По асфальту со скоростью v скользит мяч. Во сколько раз на движущийся мяч попадает больше капель (за секунду), чем на такой же неподвижный? Изменится ли ответ, если мяч не круглый?

5. **«Ванна».** Определите форму поверхности жидкости в ванне, соскальзывающей без трения с наклонной плоскости.

6. **«Ящик».** По деревянным сходням, образующим угол α с горизонтом, втаскивают за веревку ящик. Коэффициент трения ящика о сходни μ. Под каким углом β к горизонту следует направить веревку, чтобы втаскивать ящик с наименьшим усилием?

7. **«Атом».** Вокруг протона по круговой орбите вращаются четыре электрона. В любой момент времени электроны образуют квадрат со стороной a, протон находится в центре этого квадрата. Определите угловую скорость движения электронов по орбите.

Омскому НОУ — 20 лет

Немного романтичное, отчасти ироничное, но в целом правдивое повествование о том, как омское научно-профориентационное общество учащихся «Поиск» дошло до своего двадцатилетия.

Прошлое вспоминают по разным причинам. Иногда потому, что сил уже не осталось, идей новых нет, вот и приходится рассуждать перед молодежью: «Да, были люди в наше время». К Омскому научно-профориентационному обществу учащихся «Поиск» это, кажется, не относится. Зачем же вспоминать его историю? Дело в том, что оно одно из старейших в стране. Его успехи и неудачи, проблемы и находки могут оказаться поучительными для тех, кто моложе.

Сегодня деятельность этого общества охватывает несколько тысяч школьников и учащихся ПТУ города и области. А начиналось все с малого.

Младенчество

Что было, когда ничего не было? Кое-что было. В отдельных школах немногие энтузиасты хорошо вели кружки и только зарождающиеся факультативы. Проходили районные и областные олимпиады, ежегодно несколько десятков старшеклассников становились учащимися ЗМШ при ведущих университетах страны. Все было так, как и в других местах.

Но Омск — миллионный город, один из крупных вузовских центров. Поэтому вопросы работы с абитуриентами всегда были в нем актуальными. Мало ведь того, чтобы старшеклассники хорошо подготовились к вступительным экзаменам. Надо чтобы потом, при первых трудностях, они не опустили рукн, не запричитали: «И зачем я только сюда пошел, глупый был!»

Гарантий от этого никто и ничто дать не может. Зато есть давно испытанное средство для улучшения дел: надо, чтобы уже в десятом (а лучше — в девятом, восьмом) классе школьник приобщался к вузовской жизни, ее ценностям и традициям, чтобы он не только читал буклеты и справочники для поступающих, но и показывал себя — «Вот что я умею». Такой работой школьников нужно управлять, поэтому в 1968 году в Омске родилось НОУ — научное общество учащихся.

Структурно в общество вошли уже существующие и нарождающиеся лектории, кружки при вузах, детские технические и юннатские станции, дома пионеров, другие внешкольные учреждения. И вот тогда-то учредителями была сделана типичная для младенчества ошибка: НОУ имело свои подразделения где угодно, кроме самих школ.

Пятилетний период младенчества дал несколько кружков и лекториев по математике и программированию в Политехническом и Педагогическом институтах, вечернюю школу «Юный железнодорожник» в ОмИИТе. Тогда же родилась традиция ежегодных апрельских конференций НОУ, на математических секциях выступали обычно 8—10 учащихся с реферативными работами.

По-прежнему кое-что происходило в школах, но к НОУ это отношения не имело. Новый период начался с 1974 года. Именно тогда в Омске открылся университет, а ведь одна из главных задач этих уважаемых учреждений, неважно, сколько им лет — научный поиск, воспитание творческих талантов. К НОУ все это имеет прямое отношение.

Детство

Пора буйной фантазии, наивных вопросов, скоропалительных решений, ускоренного вырастания из любых одежек — вот что такое детство. А еще в детстве, увидев у соседа яркую игрушку, тянутся: «Хочу такую же!» В этот период омское НОУ активно придумывало «свое» и заимствовало «чужое».

Математический факультет ОмГУ строился выпускниками аспирантур Новосибирского университета. Почти все они — из первых «фымышат», «игрушки» Академгородка знакомы им не понаслышке. Конечно, хотелось бы иметь свою школу-интернат, летние сборы и многое из того, что впервые создавалось в Золотой Долине. Но все оказалось не так просто. Роль ФМШ взяла на себя вечерняя школа, собиравшаяся в первые годы по четвергам, а сейчас — несколько раз в неделю. Лекции, практические занятия, а потом чаепития с песнями, когда гитара то и дело переходит от кандидата наук к первокурснику, а от него — к старшекласснику, и снова по кругу. ВМШ — не просто школа, это еще и клуб — такая у нас сложилась традиция.

Летний лагерь НОУ тоже создавался математиками. Было немало сложностей (впрочем, и сейчас их хватает). В первые годы математические отряды входили в Лагерь школьного комсомольского актива. Было необычно, но интересно и полезно обоим направлениям. Потом образовался отдельный лагерь «Ломоносовец» на 200 человек с секциями краеведов, медиков, астрономов, химиков и т. д.

Взрослели «ноушата», становились студентами МГУ и МФТИ, ОмГУ и ОмПИ. У многих возникла мысль: «С нами в школьные годы занимались, мы должны вернуть этот долг». По инициативе студентов с 1978 года стали проводиться физико-математические олимпиады «ОмПИ+МФТИ» (в дальнейшем «ОмГУ+МГУ+МФТИ»), в том же году прошли первые командные олимпиады старшеклассников, еще через год — командные олимпиады ПТУ, конкурсы математических проектов. Обо всем этом не раз писалось в «Кванте» (см. 1978, № 11; 1979, № 12; 1980, № 8; 1981, № 12; 1983, № 8, 11).

Когда к руководству занятиями школьников подключились студенты, одной математической секции стало «не хватать». По 90—100 сообщений делали ежегодно старшеклассники и учащиеся ПТУ на секциях «Алгебра и геометрия», «Математический анализ», «Математика в физике, химии и технике», «Математика в гуманитарных науках», «Вычислительная математика и программирование». Конечно, часть таких сообщений — рефераты (прочел, разобрался, решил несколько упражнений, оформил доклад), но немало и творческих разработок.

В 1983 году отпраздновали свое пятнадцатилетие. Было торжественно и грустно: детство кончалось, начиналась юность с ее смятениями, сомнениями, поисками смысла жизни. И делами, конечно.

Юность

Кружки, олимпиады, конкурсы, конференции — дело, конечно, хорошее. Но мы чувствовали, что есть в Омске своеобразие, отличающее омское НОУ от подобных в Москве и Новосибирске, Челябинске и Красноярске, Ленинграде и Кишиневе. Обсуждение проекта школьной реформы заставило задуматься: в том ли направлении мы идем?

Первый вопрос, возникающий во всех НОУ: вширь или вглубь? Ведь в 99 % случаев мы занимаемся самообманом, говоря о «школьной науке», «малых академиях» и т. п. Очень редко старшеклассники в состоянии сказать свое слово в математике или ее приложениях. Есть, конечно, в разговорах о «школьной науке» элемент игры, но название обязывает. Если мы называем общество научным, то формы его работы следует нацелить именно на качество. А для этого надо в десятки раз уменьшить количество наших акций, сделать общество содружеством немногих «перспективных». А остальные? Они ведь тоже получают пользу, и немалую. Учатся работать с популярной литературой, узнают о применении математики в различных профессиях, раздумывают о том, кем быть. Если и без того ограниченные силы кураторов общество сосредоточит на лучших учащихся, что останется другим? В общем, та же проблема, что и в спорте — готовить надо олимпийских чемпионов, но и запускать массовую физкультуру тоже нельзя.

В чем же главная задача нашего общества? Мы считаем — в профессиональной ориентации, в первую очередь — на профессии, требующие высшего образования. В частности, роль математических секций — ознакомление школьника с широким спектром математических профессий (научный работник, прикладник, программист, преподаватель математики и информатики), а также показ возможностей применения математики в различных областях.

Когда мы определили эту свою задачу, возникло критическое отношение к сложившимся формам и приемам работы. Достаточно ли у нас именно профориентационных мероприятий? Все ли профессии мы пропагандируем? Обеспечиваем ли необходимое качество такой работы?

А вслед за вопросами начали появляться и конкретные ответы. Профориентацию надо начинать раньше. Поэтому, например, заочная математическая школа ОмГУ работает сегодня не только со старшеклассниками, но и с учащимися 6—8 классов. В ее заданиях наряду с привычными упражнениями появились нетипичные: изучить дополнительный материал и написать реферат, разработать и провести кружковое занятие, написать и реализовать на подручном вычислительном средстве программу. Отлажена методика проведения командных олимпиад 4—7 классов, разрабатывается тематика кружков, задания для поисковой работы.

Как правило, начинается новинка с изучения в «лаборатории» — Студенческом научно-педагогическом обществе математического факультета ОмГУ (кстати, лауреате премии Омского комсомола). Десятки курсовых и дипломных работ посвящены таким разработкам. Все то, что «получилось», передается в городские школы и ПТУ. Внедряют новинки и выпускники факультета, и студенты, и просто те, кому стало интересно. Примеры? Дипломная работа В. А. Лещинской посвящалась кружку по геометрии, на котором, в частности, юноши и девушки... вышивают. Есть в математике понятие огибающей, именно оно легло в основу построения математических фигур с помощью нитки и иголки. Сегодня такие узоры вы сможете увидеть и у студентов, и у школьников. Или кружок «Математика + музыка + язык» — эту тему разработала, будучи студенткой, Т. А. Ширшова, сейчас она уже работает учителем в одной из омских школ. Несколько десятков студенческих работ легли в основу экспозиции зала занимательной математики и информатики городского Дворца пионеров. Сегодня в нем можно увидеть любопытные демонстрационные комплексы, познакомиться с историей развития вычислительной техники «от абака до компьютера», поработать на древних, не очень древних и самых современных приборах, прослушать лекции.

Перестроена и система творческих отчетов. Они начинаются в школах, в январе — феврале проходят районные конференции общества, а лучшие работы школьников и учащихся ПТУ заслушиваются на заключительном городском туре — традиционной апрельской конференции.

Увеличилось число выступлений учащихся, сейчас их ежегодно от 200 до 300, увеличилось количество секций на конференции (появились «Педагогика математики», «Занимательная математика»), больше стало и кураторов общества, плодотворно работающих с учащимися. Доктора наук Г. П. Кукин и А. Н. Гришков, кандидаты наук Е. И. Федорова, Г. Ш Фридман, заслуженные учителя школы РСФСР В. К. Веприк и Л. Ф. Горбунов, преподаватели программирования УПК Г. Е. Купчик и М. Д. Пиастро, молодые педагоги Г. А. Гутова, М. Ю. Бурова, О. Ю. Давиденко, Е. Ю. Давиденко и многие другие вносят свой вклад в работу общества.

«Количество переходит в качество» — этот закон стал заметен и в нашем деле. Участники кружка юных программистов занимали первые места на конкурсах в республике, в стране, на международных школах в Новосибирске. Или вот маленькая деталь: идет семинар по современным проблемам алгебры, которым руководит доктор физико-математических наук А. Н. Гришков, в аудитории — доценты омских вузов, аспиранты, студенты и... школьники.

Обо всех новинках не расскажешь. Закончим повествование одной из них: профориентационной олимпиадой. Мы хотим, чтобы школьник продемонстрировал и высокий уровень подготовки к вступительным экзаменам, и умение что-то сделать в выбранной им математической профессии. Профориентационная олимпиада состоит из двух частей. Первые 30 очков можно набрать на решении задач из билета вступительных экзаменов. Здесь оценивается умение не только решить задачи, но и качественно оформить решение. Еще 30 очков можно набрать, решив нестандартные задачи на одну из предлагаемых тем. Можно попробовать свои силы в традиционных олимпиадных задачах, но есть задания и для будущих педагогов, и для любителей программирования. Такая олимпиада проводится в Омске ежегодно, постоянно совершенствуется.

Омское научно-профориентационное общество «Поиск» вступило в пору юности. А это — период любознательности и активного проявления сил. Пишите, приезжайте, приглашайте в гости. Нам есть чем обменяться со своими единомышленниками.

Факультативные задания профориентационной математической олимпиады

Педагогика математики

Вася, получив данные о поступающих на математический факультет ОмГУ в 1987 году, обработал их, вычислив шансы на поступление в зависимости от участия в профориентационных мероприятиях (число поступивших он делил на число сдававших из той же группы). Вот что у него получилось:

Вид деятельности	Всего	Зачисл.	Шансы (%)
Занятия в ЗМШ	21	16	76,2
Выступления с докладами на конференциях НПОУ «Поиск»	17	13	76,5
Призовые места в олимпиадах района	30	23	76,7
Занятия в Четверговой математической школе	14	12	85,7
Занятия в Клубе будущего педагога	8	7	87,5
Участвовали хотя бы в одном виде	68	50	73,5
Не участвовали в этой деятельности	77	19	24,7

Вася очень удивился: ясно ведь, что шансы участвовавшего «хотя бы в одном» из видов деятельности должны быть по крайней мере не ниже, чем в самом «ненадежном» из видов. А здесь все наоборот!

Ваша задача:

— изучить данный феномен и понять его причины;

— построить простую модель, объясняющую случившееся;

— изложить математическое объяснение модели.

Теоретическая математика

1. Найти все целочисленные решения уравнения $3\cdot 2^x+1=y^2$.

2. На клетчатой бумаге отмечен прямоугольник 2×6. Можно ли раскрасить узлы прямоугольника в два цвета так, чтобы никакие четыре точки одного цвета не являлись вершинами прямоугольника со сторонами — линиями сетки?

3. Найти все натуральные числа, которые нельзя представить в виде суммы несколь-

ких последовательных натуральных чисел.

4. В клетках шахматной доски произвольным образом расставлены числа 1, 2, 3,...,64. Доказать, что найдутся по крайней мере три квадрата 2×2, сумма чисел в каждом из которых больше 100.

5. Доказать, что если a, b, c — стороны произвольного треугольника, то $a^2+b^2+c^2<2(ab+ac+bc)$.

6. Сколько существует параллелепипедов, все грани которых — одинаковые ромбы с острым углом α? Найти отношение наибольшего из объемов таких параллелепипедов к наименьшему.

Информатика

1. Разработать алгоритм и написать (на любом языке программирования) программу, выбирающую из произвольной последовательности целых чисел сначала все положительные числа в порядке возрастания, затем все отрицательные числа в порядке убывания.

2. Разработать обучающе-контролирующую программу по теме «Закон Кулона». Реализовать ее на любом языке программирования.

3. Автомат по продаже газированной воды с встроенным в него микропроцессором должен работать следующим образом:

В отверстие монетоприемника опускаются одна или несколько монет общим достоинством от 1 до 6 коп. После этого нажимается одна из трех кнопок: «Без сиропа — 1 коп.», «С сиропом — 3 коп.», «С двойным сиропом — 5 коп.».

Автомат определяет сумму поступившей мелочи, если ее достаточно, то распределяет монеты по соответствующим бункерам (для 1, 2, 3 и 5-копеечных монет), наполняет стакан водой, выдает сдачу и возвращается в исходное состояние; если денег недостаточно, то автомат их возвращает.

Описать алгоритм работы микропроцессора, встроенного в автомат. Написать (на любом языке программирования) программу, реализующую этот алгоритм.

В. Н. Сергеев

Геометрия «счастливых» билетов

В статье В. Г. Болтянского «Программы перебора» («Квант», № 1) рассматривается задача определения числа «счастливых» билетов, т. е. шестизначных чисел, у которых сумма первых трех цифр равна сумме остальных. Эта задача сводится к подсчету количества трехзначных чисел с заданной суммой цифр S. Из приведенного в статье описания алгоритма следует, что первые две цифры числа K и L должны удовлетворять следующим неравенствам:

$$0\leqslant K\leqslant 9,\quad 0\leqslant L\leqslant 9,$$
$$K+L\leqslant S,\quad K+L\geqslant S-9.$$

Заметим, что вместо последнего неравенства в программе В. Г. Болтянского (см. с. 7) содержится ошибочное; строка 70 должна иметь следующий вид:

```
70 IF K+L>S-10 THEN Q=Q+1
```

Отметим на координатной плоскости OKL точки с координатами $(K,\ L)$, удовлетворяющие выписанным выше условиям. Если $S\leqslant 9$, то соответствующие точки образуют треугольник (рис. 1). Если $S>9$ (но S не больше 17) — шестиугольник (рис. 2). Рассматривая число «допустимых» точек $Q(S)$ в порядке возрастания S, получим, что при $S\leqslant 9$

$$Q(S)=Q(S-1)+S+1.$$

Если же $S>9$, то из общего числа 100 точек квадрата следует вычесть количество точек в левом нижнем ($Q(S-10)$) и правом верхнем ($Q(17-S)$) треугольниках

$$Q(S)=100-Q(S-10)-Q(17-S).$$

Поскольку $Q(0)=1$, можно последовательно определить $Q(1)$, $Q(2)$, ..., $Q(9)$ и выписать их в таблицу. Используя полученные элементы, вычислим $Q(S)$ для S от 10 до 13 и заполним таблицу до конца.

S	0	1	2	3	4	5	6	7	9	9	10	11	12	13
$Q(S)$	1	3	6	10	15	21	28	36	45	55	63	69	73	75

Теперь, следуя алгоритму В. Г. Болтянского, возведем каждое $Q(S)$ в квадрат, просуммируем эти значения и удвоим результат. Не забудем вычесть 1 — билета с номером 000 000 не существует,— и мы получим результат: число счастливых билетов равно 55 251. Простые геометрические соображения настолько сократили перебор, что мы обошлись без ЭВМ!

Г. Н. Гуртман

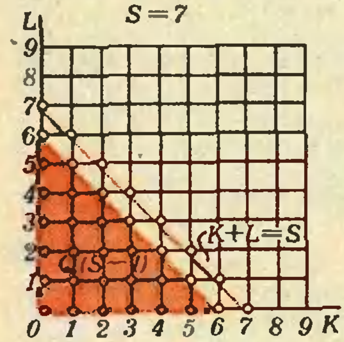


Рис. 1.

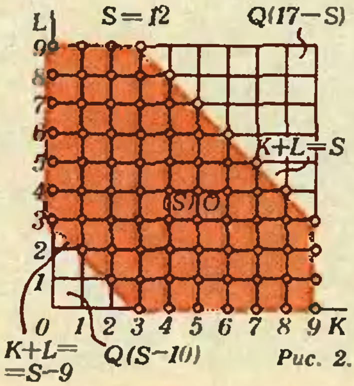


Рис. 2.

Ответы, указания, решения

Рамсеевская теория графов

Нужная 2-раскраска полного графа с 7-ю вершинами показана на рисунке 1.

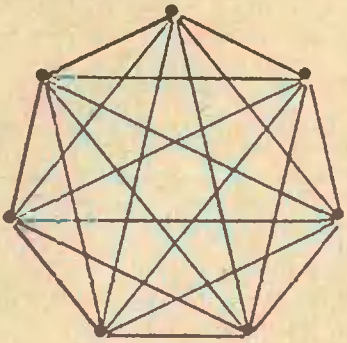


Рис. 1.

Избранные школьные задачи

1. $x_1=x_2=\ldots=x_{100}=\dfrac{-1\pm\sqrt5}{2}$. Решение. Если $x_1=\ldots=x_{100}$, то все уравнения системы превращаются в одно и то же уравнение $x_1^2+x_1-1=0$, решая которое мы получаем $x_1=\dfrac{-1\pm\sqrt5}{2}$. Покажем, что других решений нет. Преобразуем уравнения к виду $x_1=\dfrac{1}{1+x_2}$, $x_2=\dfrac{1}{1+x_3}$, ..., $x_{99}=\dfrac{1}{1+x_{100}}$, $x_{100}=\dfrac{1}{1+x_1}$. Подставим выражение для x_{100} в выражение для x_{99}, выражение для x_{99} — в выражение для x_{98} и т. д. Получим

$$x_1=\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\ddots+\cfrac{1}{1+x_1}}}.$$

Преобразуя многоэтажную дробь в правой части равенства *) к обычной форме, мы приводим равенство к виду

$$x_1=\frac{ax_1+b}{cx_1+d},\ ^{**)}$$

что равносильно квадратному уравнению. Значит, для x_1 имеется не более 2-х возможных значений, но 2 значения мы уже знаем: $\dfrac{-1\pm\sqrt5}{2}$. Значит, x_1 обязательно равно одному из этих чисел. Зная x_1, мы находим (пользуясь вышеприведенными формулами) x_{100}, x_{99}, ..., x_2, и при этом получается $x_1=x_2=\ldots=x_{99}=x_{100}$.

2. $683^3=318\,611\,987$. На самом деле верно, что для любого натурального числа $a=\overline{a_1\ldots a_n}$, не делящегося на 2 и на 5, найдется точный куб, оканчивающийся на $\overline{a_1\ldots a_n}$. При $n=1$ это можно прямо проверить: $a=1$, 3, 7 или 9, и $1^3=1$, $7^3=343$, $3^3=27$, $9^3=729$. Далее воспользуемся индукцией по n. Пусть существует число, куб которого оканчивается на $\overline{a_2\ldots a_n}$; именно, пусть m^3 оканчивается на $\overline{b_1a_2\ldots a_n}$. Пусть, далее, c — такая цифра, что $b_1+c=a_1$ или $b_1+c=10+a_1$. Подберем такое число k, что $3km^2$ оканчивается на c (это можно сделать, потому что m, а значит, и m^2, а значит, и $3m^2$, оканчивается на 1, 3, 7, 9). Тогда

$$(m+k\cdot10^{n-1})^3=m^3+3km^2\cdot10^{n-1}+$$
$$+3k^2m\cdot10^{2(n-1)}+k^3\cdot10^{3(n-1)}=$$
$$=\overline{\ldots b_1a_2\ldots a_n}+\overline{\ldots c0\ldots0}+\overline{\ldots00\ldots0}+$$
$$+\overline{\ldots00\ldots0}=\overline{\ldots a_1a_2\ldots a_n}.$$

3. $\{1,1,1\}$, $\{1,1,2\}$, $\{1,2,3\}$ (с точностью до порядка). Решение. Пусть x_1, x_2, x_3 — данные числа, и пусть $x_1\leqslant x_2\leqslant x_3$. Тогда $x_1+x_2\leqslant 2x_3$, откуда либо $x_1+x_2=x_3$, либо $x_1+x_2=2x_3$. Последнее возможно только при $x_1=x_2=x_3$, а тогда (ввиду условия взаимной простоты) $x_1=x_2=x_3=1$. Пусть $x_1+x_2=x_3$. Тогда $x_1+x_3=2x_1+x_2$ делится на x_2; значит, $2x_1$ делится на x_2. Но $2x_1\leqslant 2x_2$, так что либо $x_1=x_2$, либо $2x_1=x_2$. В первом случае $x_3=2x_1$ и (ввиду условия взаимной простоты) $\{x_1,x_2,x_3\}=\{1,1,2\}$; во втором случае $x_3=3x_1$ и $\{x_1,x_2,x_3\}=\{1,2,3\}$.

4. $\dfrac1x<\dfrac1y+\dfrac1z$, $\dfrac1y<\dfrac1z+\dfrac1x$, $\dfrac1z<\dfrac1x+\dfrac1y$. Решение. Если треугольник с высотами x, y, z существует и S — его площадь, то стороны этого треугольника равны $\dfrac{2S}{x}$, $\dfrac{2S}{y}$, $\dfrac{2S}{z}$. Записывая неравенства для сторон треугольника и сокращая их на $2S$, мы получаем вышеуказанные условия для x, y, z. Обратно, если эти условия выполнены, то существует треугольник со сторонами $\dfrac1x$, $\dfrac1y$, $\dfrac1z$. Высоты этого треугольника равны $2sx$, $2sy$, $2sz$, где s — его площадь. Производя гомотетию с коэффициентом $(2s)^{-1}$, мы получим треугольник с высотами x, y, z.

5. Не могло. Доказательство. На рисунке 2 показано одно из возможных расположений траектории $ABCA$ мяча (другие расположения либо явно невозможны, либо аналогичны этому). Обозначим углы ABP и BCP через α и β. Тогда некоторые другие углы будут тоже равны α или β (см. рисунок), в частности, будет $\angle CAA'=\alpha$ и $\angle BAQ=\beta$. Так как $\alpha+\beta=\dfrac{\pi}{2}$, получаем, что лучи AB и AC совпадают — противоречие.

6. $\left\{\pm\alpha+\dfrac{\pi}{4}+2m\pi,\ \pm\alpha+\dfrac{\pi}{4}+2n\pi\right\}$, $m, n\in\mathbb{Z}$.

Указание. Составляя сумму квадратов данных уравнений, получим $\cos(x-y)=0$. Значит, $x-y=\dfrac{\pi}{2}+l\pi$, $l\in\mathbb{Z}$. Подставив $x=y+\dfrac{\pi}{2}+l\pi$

---

*) Такие дроби называются *цепными* или *непрерывными*, о них можно прочесть в «Кванте» (1983, № 5, с. 18).

**) На самом деле $a=f_{99}$, $b=c=f_{100}$, $d=f_{101}$, где f_n — *числа Фибоначчи* (см., например, книгу Н. Н. Воробьева «Числа Фибоначчи» (М.: «Наука», 1978 — Серия «Популярные лекции по математике» или «Квант», 1988, № 3).

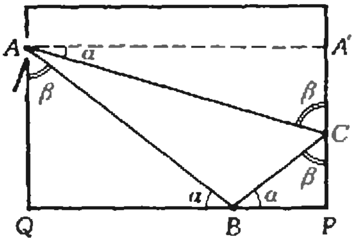


Рис. 2.

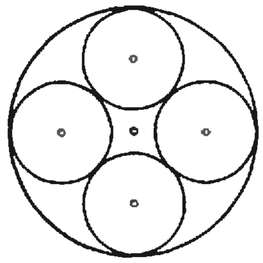


Рис. 3.

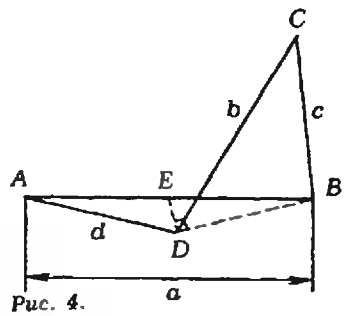


Рис. 4.

в одно из уравнений, найдем y; после этого посмотрим, какие из найденных x и y удовлетворяют системе.

7. Нельзя. Например, уравнение x^2-20x+ $+100=0$ имеет единственное решение $x=10$, а уравнение $x^2-20{,}2x+99=0$ имеет решения $x=10$, $1\pm\sqrt{3{,}01}$, большее из которых $11{,}83...$ отличается от 10 на $18{,}3...\%$ абсолютной величины. (Покажите, что еще бóльшим отклонение быть не может.)

8. $1+\sqrt{2}$. Указание. Расположение четырех неперекрывающихся кругов радиусом 1 в круге радиусом $1+\sqrt{2}$ показано на рисунке 3. Если O_1, O_2, O_3, O_4 — центры неперекрывающихся кругов радиусом 1, расположенных в круге радиусом R, то среди 12 углов $O_iO_jO_k$ хотя бы один будет прямым или тупым. В этом случае $O_iO_k\geqslant 2\sqrt{2}$, и $2R\geqslant 1+O_iO_k+$ $+1\geqslant 2+2\sqrt{2}$.

9. Наибольшее из чисел a, b, c, d должно быть меньше суммы трех других, и не все числа a, b, c, d должны быть одинаковы. Доказательство. Пусть, для определенности, $a\geqslant$ $\geqslant b\geqslant c\geqslant d$. Наши условия принимают вид $a<b+c+d$, $a>d$. Если не выполнено первое условие, то вообще не существует замкнутой ломаной со сторонами a, b, c, d; если все четыре числа одинаковы, то ломаная будет ромбом и не будет иметь самопересечения. Остается показать, что если наши условия выполнены, то замкнутая самопересекающаяся ломаная со сторонами a, b, c, d существует. Вот ее построение (рис. 4). Первое из наших неравенств показывает, что $b+c>a-d$. Возьмем отрезок AB длиной a и из его конца A проведем отрезок AD длиной d. Проведем, далее, отрезок $DE\perp DB$, у которого точка E лежит на отрезке AB. Угол BAD можно сделать настолько малым, что сумма $DE+EB$, близкая к $a-d$, будет тоже меньше $b+c$. Тем более будет $DB<b+c$. Значит, на DB можно построить треугольник DCB с боковыми сторонами b и c; мы построим его, как показано на рисунке 4. Получится замкнутая ломаная $ABCD$ с нужными длинами сторон, и легко понять, что она обладает самопересечением: так как $b>c$, то угол CDB острый; значит, при отсутствии самопересечения точка C должна попасть в треугольник DEB, что привело бы к невозможному неравенству $b+c=DC+CB\leqslant DE+EB<b+c$.

10. См. рис. 5.

11. $\{48\,261\,724\,457,\ 1\}$; $\{137,\ 5\}$. Решение. Обозначим правую часть нашего уравнения через N. Прямая проверка показывает, что N не делится на 2, 3, 5, 7 (и, значит, ни на какое число, не большее 10) и имеет при делении на 9 остаток 5 (сумма его цифр равна 50). При данном y остаток от деления числа x^y на 9 зависит только от остатка от деления числа x на 9. Составим таблицу остатков от деления x^y на 9 (x_9 — остаток от деления x на 9).

y \ x_9	0	1	2	3	4	5	6	7	8
1	0	1	2	3	4	5	6	7	8
2	0	1	4	0	7	7	0	4	1
3	0	1	8	0	1	8	0	1	8
4	0	1	7	0	4	4	0	7	1
5	0	1	5	0	7	2	0	4	8
6	0	1	1	0	1	1	0	1	1

Дальше 0-й, 3-й и 6-й столбцы будут состоять из нулей, а остальные столбцы будут периодичны с периодом 6. Остаток 5 от деления на 9 число x^y может иметь, если x имеет остаток 2 от деления на 9 и $y=5, 11, ..., 6k+5, ...$ или если x имеет остаток 5 от деления на 9 и $y=1, 7, 13, ...$ $..., 6k+1, ...$

Обратимся к нашему уравнению. Одно решение очевидно: $x=N$, $y=1$. Пусть $y>1$. Тогда $y=5, 7, 11, 13, ...$ Но $N<10^{11}$, поэтому если $y\geqslant 11$, то $x<10$, что противоречит отсутствию у N делителей, меньших 10. Значит, остаются возможности $y=5$ и $y=7$.

Пусть $y=7$. Имеем: $40^7=4^7\cdot 10^7=16\,384\times$ $\times 10^7>N$, $30^7=3^7\cdot 10^7=2187\cdot 10^7<N$, т. е. $30<x<40$. Но x должно быть нечетным и иметь остаток 5 от деления на 9; таких x в указанном интервале нет. Пусть $y=5$. Имеем: $160^5=16^5\cdot 10^5=2^{20}\cdot 10^5=1024^2\cdot 10^5>10^{11}>N$, $100^5=10^{10}<N$, $100<x<160$. Число x должно быть нечетным и иметь остаток 2 от деления на 9. Таких x в указанном интервале четыре: 101, 119, 137, 155. Но 119 делится на 7, 165 делится на 5 — они не годятся. Не годится и

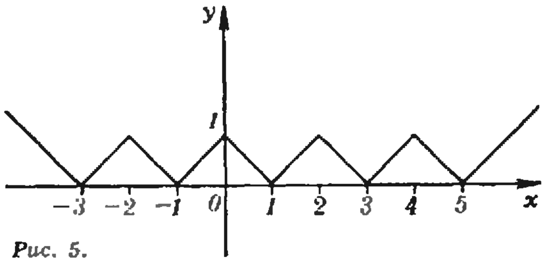


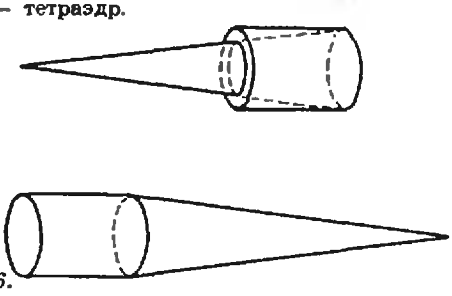
Рис. 5.

101: если x оканчивается на 1, то x^y оканчивается на 1 при любом y. Остается возможность $x=137$. Проверка показывает, что действительно $137^5=48\,261\,724\,457$.

12. $x\geqslant -\frac{1}{4}$. Доказательство. Чтобы $f_{n+1}(x)$ было определено, нужно, чтобы было определено $f_n(x)$ и чтобы было $x+f_n(x)\geqslant 0$. Предположим сначала, что $x\geqslant -\frac{1}{4}$. Если $f_n(x)>\frac{1}{2}$, то $f_{n+1}(x)=\sqrt{x+f_n(x)}>\sqrt{-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}}=\sqrt{\frac{1}{4}}=\frac{1}{2}$, т. е. и $f_{n+1}(x)>\frac{1}{2}$. Так как $f_0(x)=1>\frac{1}{2}$, то в силу доказанного $f_1(x)>\frac{1}{2}$, $f_2(x)>\frac{1}{2}$, $f_3(x)>\frac{1}{2}$, ..., т. е. $f_n(x)>\frac{1}{2}$ и $x+f_n(x)>-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}>0$ при любом n; таким образом, при $x\geqslant -\frac{1}{4}$ все $f_n(x)$ определены. Пусть теперь $x<-\frac{1}{4}$. Положим $x+\frac{1}{4}=-a$; тогда $a>0$. Очевидно, при любом $y\geqslant 0$ справедливо неравенство $\sqrt{y}\leqslant y+\frac{1}{4}$ (действительно, $y-\sqrt{y}+\frac{1}{4}=\left(\sqrt{y}-\frac{1}{2}\right)^2\geqslant 0$). Значит, если $f_{n+1}(x)$ определено, то $f_{n+1}(x)=\sqrt{x+f_n(x)}\leqslant x+f_n(x)+\frac{1}{4}=f_n(x)-a$, и, значит, $f_{n+1}(x)\leqslant f_0(x)-(n+1)a=1-(n+1)a$, из чего видно, что при достаточно большом n число $f_{n+1}(x)$, если оно определено, должно быть отрицательно, что невозможно.

13. Предположим, что наш многогранник имеет не меньше 5 граней. Пусть S_1, S_2 — две грани, имеющие общее ребро, и пусть A — внутренняя точка этого ребра. Пусть, далее, S_3 — еще одна грань; она имеет общее ребро по крайней мере с тремя гранями, значит, по крайней мере с одной гранью, отличной от S_1 и S_2. Обозначим эту последнюю грань через S_4 и обозначим через B внутреннюю точку общего ребра граней S_3 и S_4. По предположению имеется по крайней мере еще одна грань, S_5; возьмем на ней внутреннюю точку C. Плоскость, проходящая через точки A, B, C, пересекает все грани S_1, ..., S_5, и, значит, в сечении будет по крайней мере пятиугольник. Противоречие. Значит, число граней не больше 4 и наш многогранник — тетраэдр.

а)



б)

Рис. 6.

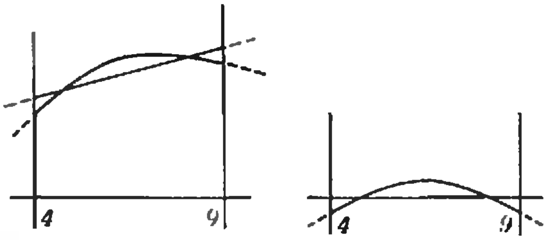


Рис. 7. а) б)

14. 19/27 или 0. Решение. Если R — радиус основания цилиндра и конуса, h и H — их высоты, то $1=\pi R^2h=\frac{1}{3}\pi R^2H$, откуда $h=\frac{1}{3}H$. Возможны два расположения наших цилиндра и конуса (рис. 6). При расположении, как на рисунке 6, *а*, общей частью будет усеченный конус, объем которого равен $\frac{1}{3}\pi R^2H-\frac{1}{3}\pi\left(\frac{2}{3}R\right)^2\left(\frac{2}{3}H\right)=\frac{1}{3}\pi R^2H-\frac{8}{27}\cdot\frac{1}{3}\pi R^2H=1-\frac{8}{27}=\frac{19}{27}$; при расположении как на рисунке 6, *б* объем общей части равен 0.

15. $a=\frac{1}{5}$, $b=\frac{49}{40}$; формула $\sqrt{x}\approx\frac{1}{5}x+\frac{49}{40}$ при $4\leqslant x\leqslant 9$ допускает погрешность не больше $\frac{1}{40}$. Решение. Нарисуем графики функций $y=\sqrt{x}$, $y=ax+b$ и $y=\sqrt{x}-ax-b$ (рис. 7). Производная функции $y=\sqrt{x}-ax-b$ равна $\frac{1}{2\sqrt{x}}-a$ и обращается в 0 в единственной точке $x=\frac{1}{4a^2}$. Функция может достигать экстремума в точке $\frac{1}{4a^2}$ и в концах отрезка. Значения в этих трех точках равны $-4a-b+2$, $\frac{1}{4a}-b$, $-9a-b+3$. Наибольшая погрешность равна максимуму абсолютных величин трех этих чисел. Эта погрешность будет минимальной, если все три абсолютных величины одинаковы (докажите!); при этом среднее число будет положительно, а крайние числа — отрицательны (см. рис. 7). Итак,

$$4a+b-2=\frac{1}{4a}-b=9a+b-3,$$

откуда $a=\frac{1}{5}$, $b=\frac{49}{40}$; при этом максимальная погрешность равна $4a+b-2=\frac{4}{5}+\frac{49}{40}-2=\frac{1}{40}$. Пример: $\sqrt{5}\approx\frac{1}{5}\cdot5+\frac{49}{40}=2{,}225$; на самом же деле $\sqrt{5}=2{,}236\ldots$

[redacted]венства и графики

1. $[3-\sqrt{10};\ 1)\cup(5;\ 3+\sqrt{10}]$.
2. $(5;\ 6)$.
3. $\left(\frac{6}{5};\ \frac{4}{3}\right]$.

4. $(-1;\ 5)$.
5. $(-\infty;\ -9] \cup (3;\ \infty)$.
6. $\left[-\frac{1}{2};\ 1\right]$.
7. $\left(\frac{2}{3};\ 2\right)$.
8. $\left[-\frac{9}{5};\ -\frac{16}{9}\right)$.
9. $\left[-1;\ \frac{5}{4}\right)$.
10. $(-\infty;\ 3]$.

[redacted]ерхностное натяжение
[redacted]пиллярные явления

1. Примерно 0,4 %; показания занижены.
2. $h = \dfrac{l}{2(1+\rho g l/(2p_0))} = 9{,}9$ см.
3. Будет сдуваться меньший пузырь.
4. В месте прикосновения образуется большая капля, которая уже не удерживается силами поверхностного натяжения.
5. В сторону сужения.
6. $r_x = \dfrac{rR}{R-r}$.

[redacted]нградский государственный
[redacted]ерситет им. А. А. Жданова

Вариант 1

1. 137. Указание. Если $\overline{abc}$ — искомое число (a, b, c — цифры), то $100a+10b+c+$ $+594=100c+10b+a$, т. е. $c-a=6$, откуда либо $c=9$, $a=3$, либо $c=8$, $a=2$, либо $c=7$, $a=1$. Первые два случая невозможны.
2. $(-\infty;\ (\sqrt{5}-1)/2]$.
3.1. $a=0$. Указание. Максимум $xy=$ $=(-8a^2+2a+1)/4$ достигается при таком a, для которого система имеет решения.
3.2. $\{-1/4\}$. Указание. Выполним замену $y=\log_{3x+2}(2x+3)$.
3.3. $x_1=\dfrac{\pi}{12}+\dfrac{k\pi}{2}$, $x_2=\dfrac{\pi}{3}+l\pi$ $(k, l \in \mathbb{Z})$. Указание. Из данного уравнения следует, что $8\cos^2 x \sin x = \sin x + \sqrt{3}\cos x$, откуда $\sin 3x=$ $=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos x - \dfrac{1}{2}\sin x = \sin\left(\dfrac{\pi}{3}-x\right)$.
4. $a^2b^2(a^2+b^2)/(a^2+b^2+ab)^2$. Указание. Пусть x — сторона квадрата. Тогда $x=\dfrac{ch}{c+h}$, где c — гипотенуза, h — высота, опущенная на гипотенузу.
5. 2. Указание. Длины четырех из шести ребер пирамиды равны $\sqrt{3}$. Пусть оставшиеся два противоположных ребра имеют длину a. Выразив через a объем пирамиды, получим уравнение, из которого найдем a.

Вариант 2

1. 12 км/ч.
2. $\{2\}$.
3.1. $x=\pm\dfrac{\pi}{3}+2k\pi$ $(k\in \mathbb{Z})$.
3.2. $a\in(36\pi^2;\ 64\pi^2)$. Указание. Восемь решений получаются по формуле $x=\pm\sqrt{a-4k^2\pi^2}$ при $k=0, 1, 2, 3$.
4. $h\sqrt{4r^2\sin^2\alpha - h^2}$. Указание. Средняя линия равнобедренной трапеции равна большему из отрезков, на которые высота трапеции делит ее большее основание.
5. $2(V\sin\alpha/2)^{1/3}(3-12\sin^2\alpha/2)^{-1/6}$. Указание. Если x — сторона основания, h — высота призмы, то $h=\sqrt{\dfrac{x^2}{4\sin^2\alpha/2}-x^2}$.

Вариант 3

1. 182 км. Указание. Пусть u и v — скорости соответственно первого и второго мотоциклов, а S — расстояние от A до B. Тогда

$$\begin{cases} \dfrac{S+13}{u}=\dfrac{S-13}{v}, \\ \dfrac{2S+\frac{S}{7}}{u}=\dfrac{S+\frac{6S}{7}}{v}, \end{cases}$$

откуда $u/v=15/13$, $S=182$.
2.1. $\{\sqrt{3}/8\}$. 2.2. $\{3\}$.
3. $x_1=\dfrac{\pi}{8}(2k+1)$, $x_2=(-1)^{l+1}\dfrac{\pi}{18}+\dfrac{l\pi}{3}$ $(k, l\in \mathbb{Z})$.
4. $\dfrac{1}{2}\arcsin\dfrac{120}{169}$; $\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{1}{2}\arcsin\dfrac{120}{169}$. Указание. Пусть a, b — катеты, c — гипотенуза, r — радиус вписанной окружности. Тогда $2r=a+b-c$, откуда $\sin\alpha+\cos\alpha=17/13$, где α — острый угол треугольника.
5.1. $a^2\sqrt{3}/6$. Указание. Секущая плоскость проходит через вершину основания пирамиды, а сечение — четырехугольник с перпендикулярными диагоналями.
5.2. $[2;\ 3)\cup(3;\ 4)\cup(4;\ \infty)$.

Вариант 4

1. 20 г.
2. $\{-1;\ 2\}$.
3. $x_1=k\pi$, $x_2=\dfrac{\pi}{6}(12l+1)$, $x_3=\dfrac{\pi}{6}(12m+5)$, $x_4=\dfrac{\pi}{2}(4n+1)$ $(m, n, k, l\in \mathbb{Z})$. Указание. Уравнение равносильно системе $\sin^2 x=$ $=\sin^2 3x-\sin^2 2x$, $\sin x\geqslant 0$.
4. $3\sqrt{3}$. Указание. $AE\cdot BC=CD\cdot AB$, $CD=$ $=2\sqrt{3}$.
5. $\dfrac{2}{3}r^3\sin^2\alpha\sqrt{3\cos^2\dfrac{\alpha}{2}-\sin^2\alpha}$. Указание. Сторона основания пирамиды равна $2r\sin\alpha$, боковое ребро равно $2r\cos\dfrac{\alpha}{2}$.

Вариант 5

1. 3 ч.
2.1. $\{3\}$.
2.2. 9.
3.1. $(0;\ 1/\sqrt{10}]\cup[10;\ \infty)$. Указание. Прологарифмируйте и выполните замену $y=\lg x$.
3.2. $x_1=\dfrac{\pi}{4}(4k+1)$, $x_2=-\dfrac{\pi}{4}+(-1)^l\times$ $\times\arcsin\dfrac{1}{2\sqrt{2}}+l\pi$ $(k, l\in \mathbb{Z})$.
Указание. Выполните замену $y=\sin x+$ $+\cos x$ (при этом $\sin 2x=y^2-1$).
4. $\sqrt{a(a+b)}$, $\sqrt{b(a+b)}$. Указание. Пусть ABC данный треугольник, O — середина гипо-

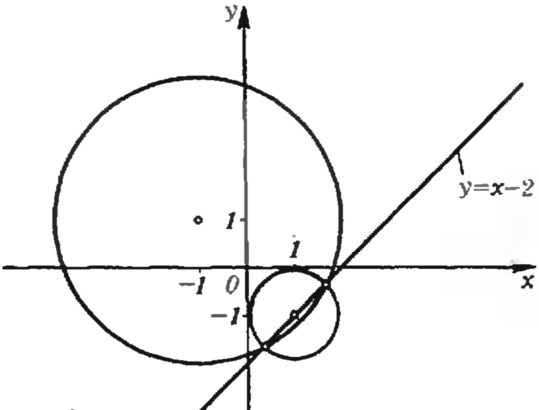


Рис. 8.

тенузы AB. Отрезок OC перпендикулярен прямой из условия задачи, а катеты AC и BC — диагонали двух прямоугольных трапеций.

5.1. $H\cos\alpha\cdot\mathrm{tg}\,\frac{\alpha}{2}$. Указание. Осевое сечение конуса — равнобедренный треугольник высоты H с углом при вершине α, на основании этого треугольника как на диаметре построена окружность радиусом $r=H\,\mathrm{tg}\,\frac{\alpha}{2}$. Длина хорды, высекаемой из этой окружности углом при вершине, равна $r\cos\alpha$.

5.2. См. рис. 8. Указание. При $y\geqslant x-2$ получаем неравенство $(x-1)^2+(y+1)^2\leqslant 1$, при $y\leqslant x-2$ — неравенство $(x+1)^2+(y-1)^2\leqslant 9$.

Вариант 6

1. 14 км/ч, 2 км/ч.
2. $\{3\}$.
3. $\left[\frac{\pi}{6};\ \frac{5\pi}{8}-\frac{1}{2}\arcsin\frac{\sqrt{2}}{4}\right)$. Указание. Неравенство равносильно совокупности двух систем:

$$\begin{cases} \cos 2x\leqslant \frac{1}{2}, \\ \sin x<\cos x, \\ 0\leqslant x\leqslant \pi, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{1}{2}-\cos 2x>(\sin x-\cos x)^2, \\ \sin x\geqslant \cos x, \\ 0\leqslant x\leqslant \pi. \end{cases}$$

4. 2. Указание. Введем систему координат так, чтобы ось Oy пошла по стороне AB, а ось OX по стороне AD. Пусть $(x, a/2)$ — координаты точки O, где a — сторона квадрата. Найдем a из системы

$$\begin{cases} x^2+\frac{a^2}{4}=25, \\ (x-a)^2+\frac{a^2}{4}=13, \\ x>a. \end{cases}$$

5. $\arccos(-\cos^2\alpha)$. Указание. Пусть h — высота боковой грани, опущенная из вершины основания, l — боковое ребро, φ — искомый угол, 1 — сторона основания. Тогда $h^2(1-\cos\varphi)=1$, $hl=1/\cos\alpha$, $l^2=\frac{1}{4}\left(1+\frac{1}{\cos^2\alpha}\right)$.

[redacted]нградский государственный [redacted]гогический институт им. А. И. Герцена

1. $-1/2$.
2. а) $\{-2;\ -1;\ 0;\ 1\}$. Указание. Выполните замену $y=x^2+x+1$; б) $x=\frac{\pi}{4}(4k+1)$, $k\in\mathbb{Z}$.
3. $[8;\ \infty)$.
4. $y_{\min}=-\frac{\pi}{12}-\frac{\sqrt{3}}{2}+\pi k$, $y_{\max}=\frac{7\pi}{12}+\frac{\sqrt{3}}{2}+\pi n$, $k, n\in\mathbb{Z}$.
5. Указание. Пусть BD и BE — высота и медиана, делящие угол B треугольника на равные части. Треугольники ABE и BEC — равнобедренные.
6. Решение. Пусть E — точка пересечения биссектрисы BD угла B с описанной окружностью. Так как $\triangle ABE\backsim\triangle BDC$, имеем $AB\cdot BC=BD\cdot BE$ (1). Из подобия $\triangle ADE\backsim\triangle BDC$, имеем $AD\cdot DC=BD\cdot DE$ (2). Вычитая из (1) равенство (2), получаем требуемое.
7. Указание. Пусть O_1 и O_2 — центры квадратов, O — точки пересечения диагоналей трапеции. Точка O_1 получается из O_2 гомотетией с центром O и коэффициентом, равным отношению соответствующих оснований трапеции.
8. 72. Указание. В трапецию можно вписать окружность.
9. $a\sqrt{6}/6$. Указание. Искомое расстояние равно длине перпендикуляра OK, где O — центр грани $ABCD$ куба, а K — точка на диагонали B_1D.

10. Минус. 11. $(6-k)/9$. 12. $a<5$. 14. а) $\{-4;\ -2;\ 0;\ 2;\ 4\}$; б) $\varnothing$. 15. а) $(0;\ 4)$; б) $(0;\ 1]\cup[4;\ +\infty)$. 16. $[-8;\ -2)\cup(-2;\ -3/2)\cup(0;\ 1/2)\cup(1/2;\ \infty)$.

17. а) $y=x^2-2$ при $x<-5/3$, $y=2-x^2$ при $x>-5/3$; б) $y=8-3x$ при $x<8/3$; в) $y=|3x-4|-7$.

18. 4. 19. 5. 20. 1. 21. $3\sqrt{35}$. 22. $4\sqrt{6}$.

[redacted]нградский политехнический [redacted]итут им. М. И. Калинина

Математика

Вариант 1

1. $\{\log_6 2;\ -1\}$.
2. $\left\{\left(-\frac{41}{25};\ \frac{2}{3}\right);\ \left(-\frac{46}{25};\ 1\right)\right\}$.
3. $\left\{k\pi-\mathrm{arctg}\,\frac{1}{4};\ n\pi-\mathrm{arctg}\,\frac{1}{2}\right\}$; $k, n\in\mathbb{Z}$.
4. $\left(0;\ \frac{1}{27}\right)\cup(\sqrt[8]{27};\ +\infty)$.
5. $\sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi}}\left(1+\frac{1}{\sqrt{-1-2\cos\alpha}}\right)$. Указание. Пусть r — радиус вписанного шара, a — сторона основания, d — высота боковой грани, l — апофема пирамиды, h — ее высота. Тогда $h=r\left(1+\frac{2l}{a\sqrt{3}}\right)$, $la=d\sqrt{l^2+\frac{a^2}{4}}$, $a\sqrt{3}=2d\sin\alpha/2$.

Вариант 2

1. $\{(4;\ 3\sqrt[3]{3});\ (4^{-7/6};\ 3^{-43/36})\}$.
2. $81/169$.
3. $\left(-\frac{5}{2};\ -\frac{7}{4}\right)\cup\left(-\frac{3}{4};\ 1\right)$. Указание. Возведя обе части неравенства в квадрат, получаем эквивалентное неравенство. Переносим все члены в левую часть. Разность квадратов раскладываем на множители.
4. $x=\pm\frac{1}{2}\arccos\frac{36}{89}+\pi k,\ k\in Z$. Указание. Применяя формулу для косинуса тройного аргумента, знаменатель первого слагаемого в левой части уравнения разложим на множители. После сокращения общего множителя в числителе и знаменателе уравнение сведется к линейному относительно $\cos 2x$.
5. $2\arccos\dfrac{\cos\frac{\pi}{5}}{\sin\frac{\varphi}{2}}$. Указание. Пусть γ — искомый угол, a — сторона основания, d — высота боковой грани, проведенная из вершины основания, l — боковое ребро. Тогда $a\cos\frac{\pi}{5}=d\sin\frac{\varphi}{2}$, $d=l\sin\gamma$, $a=2l\sin\frac{\gamma}{2}$.

Физика

1. $\cos\alpha=1-2\left(\frac{m}{M+m}\right)^2\frac{v^2}{gl}=0{,}87$.
2. $a=g(\sin\beta-\mu\cos\beta/\sin\alpha)$.
3. $N=5\cdot10^{-2}$ Вт. Указание. Воспользуйтесь соотношением, связывающим изменение потенциальной энергии взаимодействия с силой этого взаимодействия: $F=-\Delta W/\Delta x$.
4. $$x=\frac{1}{2}\left(\left(\frac{p_0}{\rho g}+l\right)-\sqrt{\left(\frac{p_0}{\rho g}+l\right)^2-4h\left(\frac{p_0}{\rho g}+h-l\right)}\right)=3{,}5\ \text{см},$$ $$l_0=\frac{p_0}{\rho g}+h=95\ \text{см},$$ где $\rho=13{,}6\cdot10^3$ кг/м^3 — плотность ртути.
5. $p_2=2p_1V_1T_2/(V_2T_1)=8\cdot10^5$ Па $=8$ атм.
6. $Q={}^5/_2V_1(p_2-p_1)$.
7. $v_{max}=q/\sqrt{2\pi\varepsilon_0 ma}=9{,}5\cdot10^{-2}$ м/с, где $\varepsilon_0=8{,}85\cdot10^{-12}$ Ф/м — электрическая постоянная.
8. $x=\frac{1}{4}\frac{U}{U_0}\frac{l}{d}(2L+l)=3\cdot10^{-2}$ м $=3$ см.
9. $\lambda=2\pi c\sqrt{\dfrac{\mathcal{E}C}{\Delta I/\Delta t}}=2{,}45\cdot10^3$ м.
10. $l=2h\sin\alpha/\sqrt{n^2-\sin^2\alpha}=0{,}97$ м.

[redacted]нградский электротехнический
[redacted]тут им. В. И. Ульянова (Ленина)

Математика

Вариант 1

1. а) $\{-\sqrt{2};\ \sqrt{2}\}$.
б) 7. Указание. Функция $f(t)=7-t-t^2$ при $t\geqslant0$ убывает.
в) $0\leqslant x\leqslant1$.
г) 2 решения при $a<7$, 1 решение при $a=7$; нет решений при $a>7$. Указание. Уравнение $7-t-t^2=a$ в области $t\geqslant0$ не имеет решений, если $a>7$, и имеет одно (положительное) решение, если $a<7$.
2. а) Указание. $BC^2=AC^2+AB^2-2AC\times\times AB\cos\alpha$. б) $\alpha=\frac{\pi}{3}$. Указание. В области определения функции g уравнение $g(\alpha)=4\sqrt{3}$ равносильно уравнению $\sin(\alpha+\pi/6)=1$. в) $4\sqrt{3}$. Указание. Производная $g'(\alpha)=4\dfrac{1-2\cos\alpha}{\sin^2\alpha}$ положительна при $\pi>\alpha>\frac{\pi}{3}$ и отрицательна при $\frac{\pi}{3}>\alpha>0$.
3. а) Указание. Пусть $b=2(a^2-3a+2)$; $p(x)=x^2-bx$.
Тогда $h(a)=p(-1)$ при $b>0$; $h(a)=p(1)$ при $b<0$.
б) $a_1=\frac{3}{2}$; $a_2=\frac{3+\sqrt{2}}{2}$; $a_3=\frac{3-\sqrt{2}}{2}$.

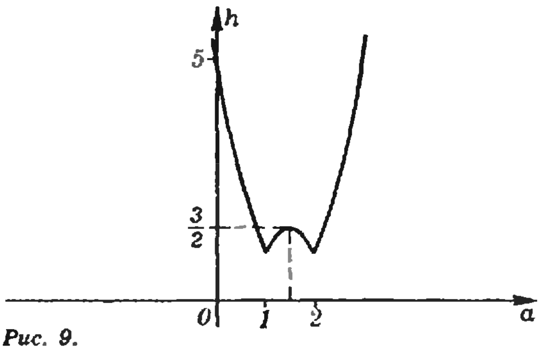


Рис. 9.

в) См. рис. 9.

Вариант 2

1. а) $\{(1;\ -1)\}$.
б) При $a=2$ или при $a<1$.
в) При $a\geqslant0$. Указание. Исключение из системы параметра a приводит к соотношению $(\sqrt{x}-1)(y+1)=0$.
2. а) Указание. Радиусы, проведенные в точки касания P, Q, R разбивают треугольник PQR на три равнобедренных треугольника с углами при вершинах $\pi-\alpha$, $\frac{2\pi}{3}$, $\alpha+\frac{\pi}{3}$.
б) $\left[\frac{\sqrt{3}}{2},\ \frac{3\sqrt{3}}{4}\right]$.
в) Часть синусоиды
$$s=\frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin(\alpha+\pi/6),$$
отвечающая области допустимых значений $0<\alpha<2\pi/3$.
3. а) -10.
б) Для любых допустимых x

$$f(x)=3-\frac{2}{2\cos^2\frac{x}{2}}-\sqrt{\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{2\cos^2\frac{x}{2}}}=$$
$$=3-\left(1+\mathrm{tg}^2\frac{x}{2}\right)-\left|\mathrm{tg}\,\frac{x}{2}\right|.$$

в) $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)\cup\left(\frac{3\pi}{2},2\pi\right)$. Указание. Из неравенства $2-t^2-|t|\geqslant 0$, $t=\mathrm{tg}\,\frac{x}{2}$, получаем $|t|\leqslant 1$.

г) При $a\leqslant 2$. Указание. При $t\geqslant 0$ функция $g(t)=2-t^2-|t|$ задается выражением $2-t^2-t$, монотонно убывает с ростом t и принимает все возможные значения из промежутка $(-\infty,2)$. Кроме того, $g(t)=g(-t)$.

Физика

1. $Q=mg(h-g(\Delta t)^2/8)=0{,}2$ Дж.
2. Нить разорвется, так как $F_н=3mg=29{,}4$ Н $>F=24{,}5$ Н.
3. $\alpha=1-n/k$.
4. $p=\frac{2}{3}\frac{E}{V}=0{,}8\cdot10^6$ Па.
5. $A=pV(T_2/T_1-1)=300$ Дж.
6. $I=\frac{\mathcal{E}vb\varepsilon_0(\varepsilon-1)}{d}$.
7. $q=\sqrt{4\pi\varepsilon_0 mgd^3/\sqrt{4l^2-d^2}}\approx5{,}2\cdot10^{-8}$ Кл (здесь $\varepsilon_0=8{,}85\cdot10^{-12}$ Ф/м — электрическая постоянная).
8. $r=R/\sqrt{2}$.
9. $\lambda\approx d\alpha\approx3{,}14\cdot10^{-7}$ м (здесь $\alpha=3^\circ=\pi/60$ рад).
10. $v=\sqrt{\frac{2}{m}\left(\frac{hc}{\lambda}-A\right)}=2{,}2\cdot10^5$ м/с (здесь $m=9{,}1\cdot10^{-31}$ кг — масса электрона, $h=6{,}62\cdot10^{-34}$ Дж·с — постоянная Планка, $c=3\cdot10^8$ м/с — скорость света, $A=4$ эВ $=6{,}4\cdot10^{-19}$ Дж — работа выхода электрона).

[redacted]ковский авиационный институт Серго Орджоникидзе

Математика

Вариант 1

1. $\{2\}$.
2. $y=1-\frac{\sqrt2}{2}-\frac{\sqrt2}{2}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$.
3. 24.
4. $x_1=\pi k$, $x_2=\frac{\pi}{4}(4n+1)$, $k,n\in Z$.
5. $\left|\frac{2}{5}-\cos^2\alpha\right|$. Указание. Треугольник AMN подобен треугольнику ABC с коэффициентом подобия $\cos\alpha$, а площадь треугольника AMB составляет 2/5 площади треугольника ABC.
6. $(0;1)\cup[2;3)\cup[6;\infty)$.
7. $[0;5+2\sqrt6]$. Указание. Точки $x=0$ и $x=-2$ удовлетворяют неравенству при любых a. Поэтому множество решений неравенства $|x|(x-1)\leqslant a(x+2)$ (*) должно содержать интервал $(-2;0)$. При $a<0$ уравнение $-x(x-1)=a(x+2)$ имеет корень, принадлежащий промежутку $(-2;0)$, и поэтому такие a не удовлетворяют условию. При $5+2\sqrt6>a\geqslant0$ уравнение $|x|(x-1)=a(x+2)$ имеет единственный корень x_0, больший 1, и не имеет отрицательных корней, так что неравенство (*) справедливо при всех $x\leqslant x_0$. При $a=5+2\sqrt6$ неравенство (*) также справедливо при таких x. Если же $a>5+2\sqrt6$, то уравнение $-x(x-1)=a(x+2)$ имеет два отрицательных корня x_1 и x_2 ($x_1<x_2$), и множество решений неравенства является объединением промежутков $(-\infty,x_1)\cup(x_2;x_0)$.
8. $(b^3\sin3\alpha\cos^2\beta\sin\beta)\,3$. Указание. Основанием высоты SD пирамиды является середина гипотенузы треугольника ABC.

Вариант 2

1. $\{2\}$.
2. $-\sqrt{(1+a)/(1-a)}$.
3. $x_1=4$ и $x_2=\pi k$, $k\in Z$.
4. $(0;1)\cup(1;7/6)$.
5. $\{(0;1);(1;0)\}$.
6. 30°, 150°.
7. $f(x)=\frac{1}{14}x+\frac{15}{14}$; $g(x)=-\frac{2}{7}x+\frac{5}{7}$. Указание. Функции $f(x)$ и $g(x)$ удовлетворяют системе
$$\begin{cases}f(x)+2g(x)=-0{,}5x+2{,}5,\\ 3f(x)-g(x)=0{,}5x+2{,}5.\end{cases}$$
8. $\sqrt{\frac{211}{147}}$. Указание. Пусть L точка пересечения апофемы SD пирамиды с отрезком MN, а K — середина SA. Отношение площадей равно отношению отрезков KL и AL. Отрезок KL следует с помощью теоремы косинусов выразить через AL и AK, а $\cos\angle KAL$ найти из треугольника ASL.

Физика

Вариант 1

2. $t=\omega_0R/(\mu g)$; $N=\omega_0^2R/(4\pi\mu g)$.
3. $M=mR\Delta T/(Q_1-Q_2)=0{,}033$ кг/моль (что близко к молярной массе кислорода $M_к=0{,}032$ кг/моль).
4. $\varphi_A-\varphi_B=(\sigma_2a-\sigma_1b)/(2\varepsilon_0)=1100$ В.
5. $\nu=\nu_{min}+eU_з/h=1{,}32\cdot10^{15}$ Гц; $A_{вых}=h\nu_{min}=4\cdot10^{-19}$ Дж $\approx2{,}5$ эВ.

Вариант 2

2. $H_{max}=50\,h/27$. Указание. После прохождения положения равновесия до того момента, как натяжение нити станет равным нулю, шарик движется по окружности радиусом h, а затем — по параболе (как тело, брошенное под углом к горизонту).
3. $p'=2(1+z)\,mRT'/(MV)\approx1{,}9\cdot10^8$ Па (при полной ионизации кислорода концентрация электронов в плазме больше концентрации ядер в $z=8$ раз); $p'/p=2(1+z)T'/T\approx6\cdot10^4$.
4. $I=I_1I_2/(I_1+I_2)=2$ А.
5. $n=ch/(E\lambda)=1{,}5$.

[redacted]ковский [redacted]гетический институт

Математика

Вариант 1

1. $f'(-1)=-4$, $f'(3)=0$. 2. $\{0;1\}$.
3. 10 ч, 15 ч. 4. $x=\frac{\pi}{3}+2\pi n$, $n\in Z$.
5. $h^3\sqrt3/(k^2-1)$.

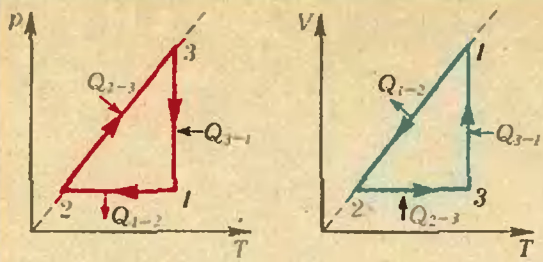


Рис. 10.

Вариант 2

1. $f'\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}$, $f'(2)=32$. 2. $\{0\}$. 3. В 16 ч и в 14 ч 15 мин.

4. $x=\arcsin\frac{2}{\sqrt{13}}+2\pi n,\ n\in Z$.

5. $\pi R^3(k+1)^2/3(k-1)$.

Физика

Вариант 1

2. Непосредственно после включения спираль лампы еще не нагрелась и поэтому ее сопротивление меньше, чем в нагретом состоянии.
3. $v_0=v+(gh)/(2v)=344{,}3$ м/с.
4. $m=\rho_1\rho_2 hS/(\rho_2-\rho_1)=6{,}75$ кг.
5. Электрон движется по окружности радиусом $R=vm/(Be)$.

Вариант 2

2. Нет, нельзя.
3. См. рис. 10.
4. $A=m((v^2-v_0^2)-2gh)/2=-81{,}3$ Дж.
5. $R=(\mathscr{E}_1 r_1-\mathscr{E}_2 r_2)/\mathscr{E}_2=0{,}16$ Ом.

нт» для младших школьников
«Квант» № 3)

1. Сначала, посадив в лодку козла, перевозим по очереди собаку, а затем капусту. Возвращаемся с козлом и, высадив его, берем двух волков; высадив их, возвращаемся с собакой. Последним рейсом перевозим собаку и козла.
2. Задача основана на том, что прибавление к группе чисел их среднего арифметического дает группу чисел с тем же средним арифметическим. **Ответ:** последний стрелок выбил 70 очков.
3. $285\times39=11\,115$.
4. Вспотевший спортсмен теряет много тепла при испарении, что может привести к простуде, если не укрыться.

Рис. 11.

5. См. рис. 11. Пять квадратиков равны по площади четырем большим квадратам, $5x=400$ см^2, $x=80$ см^2.

Квант

Главный редактор — академик Ю. А. Осипьян

Заместители главного редактора:
В. Н. Боровишки, А. А. Варламов,
В. А. Лешковцев, Ю. П. Соловьев

Номер подготовили:
А. Н. Виленкин, А. А. Егоров, Л. В. Кардасевич, И. Н. Клумова, Т. С. Петрова, А. Б. Сосинский, В. А. Тихомирова

Номер оформили:
Ю. А. Ващенко, М. Б. Дубах, С. В. Иванов, Н. С. Кузьмина, Д. А. Крымов, Э. В. Назаров, И. Е. Смирнова, Е. К. Тенчурина, П. И. Чернуский, В. Б. Юдин

Редактор отдела художественного оформления С. В. Иванов
Художественный редактор Т. М. Макарова
Заведующая редакцией Л. В. Чернова
Корректор Т. С. Вайсберг

Сдано в набор 15.02.88. Подписано к печати 25.03.88.
Т-09540. Бумага 70×100/16. Печать офсетная
Усл. кр.-отт. 27,30. Усл. печ. л. 6,5. Уч.-изд. л. 8,28
Тираж 196 374 экз. Цена 40 коп. Заказ 340.

Ордена Трудового Красного Знамени
Чеховский полиграфический комбинат
ВО «Союзполиграфпром»
Государственного комитета СССР
по делам издательств, полиграфии
и книжной торговли
142300 г. Чехов Московской области

103006 Москва К-6, ул. Горького, 32/1, «Квант», тел. 250-33-54

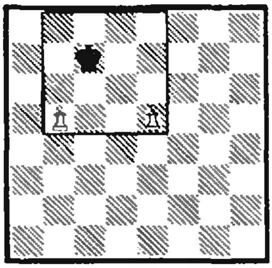
Шахматная страничка

БЛУЖДАЮЩИЙ КВАДРАТ

В шахматном окончании алгоритм игры часто носит геометрический характер. Мы не раз упоминали правило квадрата и метод треугольника. Познакомимся теперь с правилом блуждающего квадрата.

Речь идет о позициях, в которых король борется с двумя изолированными проходными пешками противника, расположенными на одной горизонтали. Построим квадрат, в углах которого стоят эти пешки, причем они движутся внутрь квадрата. (При продвижении пешек квадрат меняет свое положение, поэтому и называется блуждающим.)

Правило блуждающего квадрата заключается в следующем. *Если он касается края доски или выходит за ее пределы, то король не может помешать самостоятельному продвижению пешек в ферзи.*



Здесь квадрат коснулся края доски, белые выигрывают независимо от очереди хода и расположения их короля: 1...Крb6 2. e6 Крc7 3. e7 Крd7 4. b6 и т. д.

А как обстоит дело, если блуждающий квадрат еще не достиг края доски? В этом случае самостоятельно пешки пройти не могут, все зависит от длины стороны квадрата. Если она равна трем (пешки a5, c5, король b7), то пешки поддерживают друг друга, но для короля безопасны (1...Крc6 2. a6 Крc7 и король перемещается с c7 на c6 и обратно). Если же сторона квадрата — четыре, то пешки гибнут. Если, например, белые пешки стоят на c4 и f4, а черный король — на d6, то король забирает обе пешки независимо от очереди хода: 1...Крc5 2. f5 Крd6! 3. f6 Крe6 4. c5 Кр:f6 5. c6 Крe6, и король успевает в квадрат оставшейся пешки.

При стороне блуждающего квадрата, равной пяти, ситуация та же, что и при стороне три — пешки держат сами себя, но пройти в ферзи не могут.

Остальные случаи совсем просты: блуждающих квадратов со стороной 6 (не касающихся края доски) всего три (пешки a2, f2; b2, g2; c2, h2). За счет двойного первого хода одна из пешек проходит в ферзи. Квадраты со стороной 7 или 8 достигают края доски, и пешки тоже берут верх.

Разумеется, в тех случаях, когда король не пускает пешки, но не может их взять, все зависит от возможностей другого короля. Рассмотрим теперь несколько примеров из коллекции мастера С. Веселовского.

Штольц — Нимцович (Берлин, 1928 г.)

Белые: Крd2, п. п. a4, b5, g3; черные: Крe5, п. п. d4, f5 g4. 1...f4! 2. gf+Крd6! Черные пешки образуют блуждающий квадрат, касающийся первой горизонтали, и, значит, самостоятельно проходят в ферзи. Любопытно, что после 3. f5 и белые пешки образуют блуждающий квадрат, причем даже выходящий за пределы доски, однако они уступают неприятельским пешкам в скорости движения, поэтому черные берут верх.

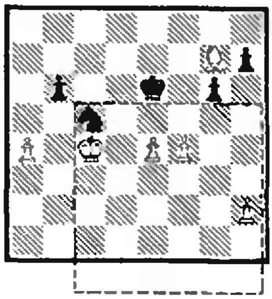
Вохл — Соломон (Австралия, 1986 г.)

Белые: Крf2, п. п. d4, f3, g3, h4; черные: Крe7, п. п. e5, f5, f7, h5. Напрашивается 1. de, однако после 1...Крe6 2. f4 Крd5 3. Крe3 Крc4 белые не могут выиграть, несмотря на лишнюю пешку. Другое дело, если белые жертвуют пешку: 1. d5! e4 2. g4! Черные сдались, после 2...fg 3. fg hg 4. h5 белые строят необходимый квадрат на пешках d5 и h5. Занятен и другой вариант: 1...Крd6 2. g4 fg 3. fg Кр:d5 4. gh Крe6 5. h6 Крf6 6. h5, черные гибнут из-за цугцванга.

Штальберг — Тартаковер (Париж, 1934 г.)

Белые: Крe2, п. п. c4, d4, g6, h2; черные: Крe6, п. п. a7, b7, d5, g7. Белые только что сыграли 1. c4 и в случае 1...Крf6 2. cd Кр:g6 могли спокойно сдаваться. Однако Тартаковер решил прихватить пешку, обнаружив пробелы в знании шахматной геометрии. 1...dc? 2. h4!, и белые построили блуждающий квадрат 5×5, касающийся края доски (наличие пешек «g» не имеет значения): 2...a5 3. h5 a4 4. h6 gh 5. d5+Крf6 6. d6 a3 7. d7 Крe7 8. g7 с выигрышем.

Карпов — Соколов (Линарес, 1987 г.)



Удивительно, но в данном случае построение блуждающего квадрата могло сыграть важную роль в суперфинальном матче претендентов. В партии последовало 1...К:e4? 2. Крb5 Кc5 3. Сf8, и белые легко выиграли. Между тем в распоряжении Соколова был следующий вариант: 1...К:a4 2. Сd4 Крd6 3. Крb5 Кc5 4. С: c5+ bc 5. h3 (5. h4 h6 6. Крc4 Крc6 7. e5 h5— ничья) и теперь 5...g5! с ничьей (6. fg Крe5), поскольку 6. f5? вообще ведет к проигрышу белых: 6...h5, и у черных блуждающий квадрат со стороной 6 (показан пунктиром).

Е. Я. Гик

Цена 40 коп.

Индекс 70465

Здесь показана трехцветная раскраска полного графа K_{16}, т. е. графа с 16 вершинами, все пары вершин которого соединены ребрами. Эта раскраска замечательна тем, что в ней нет ни одного одноцветного треугольника, в то время как любая (трехцветная) раскраска полного графа с бо́льшим числом вершин (например, K_{23}) обязательно содержит такой треугольник. Полный граф с наименьшим числом вершин, в котором при раскраске обязательно встречается запрещенная одноцветная конфигурация (в данном случае — треугольники), называется «графом Рамсея» (для данного набора запрещенных конфигураций). Так, граф K_{17} — соответствующий граф Рамсея. Разумеется, для другого числа цветов и других наборов конфигураций возникают свои графы Рамсея; о них можно прочитать в статье М. Гарднера в этом номере. С каждым графом Рамсея (с n вершинами) связаны головоломка и игра. Головоломка состоит в том, чтобы раскрасить полный граф K_{n-1}, не создав при этом ни одной запрещенной конфигурации. (Так, приведенный здесь рисунок — решение этой головоломки для n=17). Игра же проводится на графе Рамсея (скажем, на K_{17}) двумя игроками, которые поочередно раскрашивают ребра графа (здесь — в три цвета), избегая запретных конфигураций (здесь — одноцветных треугольников); проигрывает тот, кто вынужден создать такую конфигурацию. Ничьих не бывает (почему?).